臺北市立復興高級中學105學年度第2次正式教師甄選

數學科教師甄選筆試答案

1. 答：$\dfrac{2^{2018}-1}{3}-1009$

解：因為 2＝3－1，所以若 n 為奇數，$\left[\dfrac{2^n}{3}\right]=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{2}{3}$；若 n 為偶數，$\left[\dfrac{2^n}{3}\right]=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{1}{3}$，

因 $\left[\dfrac{1}{3}\right]+\left[\dfrac{2}{3}\right]+\left[\dfrac{4}{3}\right]+\left[\dfrac{8}{3}\right]+\cdots+\left[\dfrac{2^{2017}}{3}\right]=\dfrac{1+2+4+\cdots+2^{2017}}{3}-\dfrac{2018}{2}=\dfrac{2^{2018}-1}{3}-1009$。

2. 答：略

解：$(\sqrt{3x+y+z}^2+\sqrt{x+3y+z}^2+\sqrt{x+y+3z}^2)(\sqrt{\dfrac{1}{3x+y+z}}^2+\sqrt{\dfrac{1}{x+3y+z}}^2+\sqrt{\dfrac{1}{x+y+3z}}^2)\geq(1+1+1)^2$，

$(5x+5y+5z)(\dfrac{1}{3x+y+z}+\dfrac{1}{x+3y+z}+\dfrac{1}{x+y+3z})\geq 9$，

$(x+y+z)(\dfrac{1}{3x+y+z}+\dfrac{1}{x+3y+z}+\dfrac{1}{x+y+3z})\geq\dfrac{9}{5}$，

$(1-\dfrac{2x}{3x+y+z})+(1-\dfrac{2y}{x+3.y+z})+(1-\dfrac{2z}{x+y+3z})\geq 3-2\times\dfrac{3}{5}$，

$\dfrac{x}{3x+y+z}+\dfrac{y}{x+3.y+z}+\dfrac{z}{x+y+3z}\leq\dfrac{3}{5}$。

3. 答：$5+\sqrt{10}$

解：略

4. 答：$a_n=\dfrac{n}{n+2}$

解：略

5. 答：10

解：設甲、乙、丙三生產線製造的手機占全部手機的產量分別為 x%、y%與 z%（x, y, z≥0），

且 x+y+z=100，依題意，可列得 $\dfrac{x\%\times3\%}{x\%\times3\%+y\%\times1\%+z\%\times1\%}\leq\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3x}{3x+y+z}\leq\dfrac{1}{4}$，

12x≤100+2x，x≤10，故甲生產線製造的手機占全部手機產量至多 10%。

6. 答：3 或 $\dfrac{5}{3}$

解：兩平面的法向量(a, b, c)與(1, 1, 1)的夾角為 30°或 150°，

由兩向量夾角公式，得 $\dfrac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$a+b+c=\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

又由(3)：a+b+c>0，得 $a+b+c=\dfrac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，即 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2}{3}(a+b+c)\cdots$①。

再由(2)，得 $\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$，即 $a+b+c-1=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdots$②。

將①代入②，得 a+b+c−1=$\pm\dfrac{2}{3}(a+b+c)$，解得 a+b+c=3 或 $\dfrac{5}{3}$。

7. 答：略

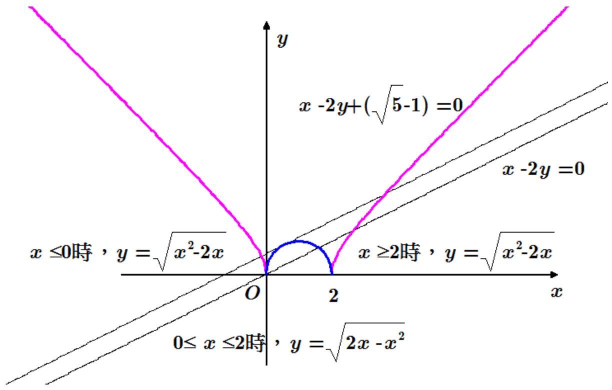
解：略

8. 答：1

解：略。

9. 答：$0<k<\sqrt{5}-1$

解：



10. 答：略

解：(1)從恆等式$(-1+i)^{n+1}=(-1+i)^n(-1+i)$．

(2)由$(-1+i)^{n+1}=(-1+i)^n(-1+i)$，得$a_{n+1}+ib_{n+1}=(a_n+ib_n)(-1+i)=(-a_n-b_n)+(a_n-b_n)i$，

即$a_{n+1}=-a_n-b_n$，$b_{n+1}=a_n-b_n$．

上式可用矩陣表示為$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，因此，矩陣$T=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$．

(3)將 T 改寫為$T=\sqrt{2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos135^\circ&-\sin135^\circ\\\sin135^\circ&\cos135^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos135^\circ&-\sin135^\circ\\\sin135^\circ&\cos135^\circ\end{bmatrix}$，

得知 T 的變換是以 O 為中心旋轉 135°後，再伸縮$\sqrt{2}$倍．因此，

$\overline{OP'}=\sqrt{2}\times\overline{OP}$，$\angle P'OP=45^\circ$，$\overline{OQ'}=\sqrt{2}\times\overline{OQ}$，$\angle Q'OQ=135^\circ$．

故$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}=\sqrt{2}$．

因為將$\angle POQ$的兩邊各以頂點 O 為中心旋轉 135°，其大小不變，所以$\angle POQ=\angle P'OQ'$．