國立臺南第一高級中學 105 學年度教師甄選初試數學科試題

填充題 8 格，每格五分，不需過程；計算證明六題，每題十分，需詳列過程。

一、填充題

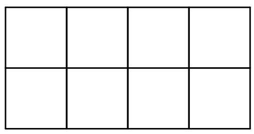
1. x, y 皆為整數且滿足 $5x-4y+3=0$、$x^2+y^2\le 100^2$，則這樣的數對 (x,y) 有______組。

2. 矩陣 $A=[a_{ij}]_{6\times 8}$，$a_{ij}=-i+j$；矩陣 $B=[b_{ij}]_{8\times 7}$，$b_{ij}=i-2j$，設 $AB=[c_{ij}]$。若當 $i=p$、$j=q$ 時，c_{ij} 有最大值；當 $i=r$、$j=s$ 時，c_{ij} 有最小值，則有序數對 $(p,q,r,s)=$ __________。

3. 有一數列 $<a_n>$ 的第一項 $a_1=2$，並以 S_n 表此數列的前 n 項和。若此數列滿足

   $a_{n+1}=S_n+n^2-n+2$, $n=1,2,3,\cdots$，則此數列的一般項 $a_n=$_________。(以 n 表示)

4. 以四種顏色畫筆塗右圖 8 格方格(固定的、不考慮旋轉)，每種顏色皆各塗兩格，每格方格只塗一種顏色，並要求同色不相鄰，則有_____種不同的塗色方法。(只考慮最後結果，不考慮過程中方格塗色的順序)

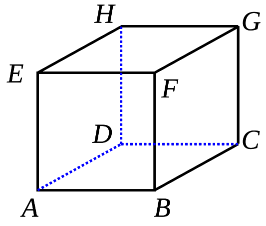


5. 已知 Γ: $y=|x|$，直線 L 通過點 $(0,1)$ 且斜率為 m $(-1<m<1)$，若 Γ 與直線 L 相交於 P, Q 兩點，則線段 $\overline{PQ}$ 的中點 R 的軌跡方程式為________。

6. 直角坐標平面上，點 $A(8,3)$，點 P 為拋物線 $y=x^2-x-2$ 上的動點，則線段 $\overline{AP}$ 長度的最小值為________。

7. 有一底圓半徑 r 的圓柱體，設其底圓所在平面為 E。此圓柱體被一平面 F 截出一橢圓 Γ，若平面 E 與平面 F 所夾的銳夾角為 $60°$，則橢圓 Γ 的內接矩形面積最大為__________。

8. 右圖為一正方體，其中 $D(0,0,0)$、$A(10,0,0)$、$C(0,10,0)$、$H(0,0,10)$ 平面 $EFGH$ 上有一點 $P(1,8,10)$，今自 D 點向 P 點射一光線，先經平面 $EFGH$ 反射後到達平面 $BCGF$ 上的 Q 點，再經平面 $BCGF$ 反射後到達平面 $ABCD$ 上的 R 點，則 R 點坐標為_________。



二、計算證明題

1. 證明以 $F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$為焦點，長軸長為 $2a$ 的橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 。

   注意，要證明充分必要條件。

2. 已知 $r\geq 0$ ，試證明 $\dfrac{1}{5}(1+r+r^2+r^3+r^4)\leq\dfrac{1}{2}(1+r^4)$

3. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，若點 P 在 $\overline{AD}$ 上，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BP}$ 交於點 Q ，

   若令 $S=\Delta APQ$面積$+\Delta QBC$面積 ，試求 S 的最小值。

4. 一個公正的骰子連續投擲 n 次 $(n\geq 2)$ ，其出現的點數依次為 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ ，

   (1) 試求 $(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3-3)^2+\cdots+(x_n-3)^2=2$ 的機率。(4 分)

   (2) 試求 $(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3-3)^2+\cdots+(x_n-3)^2\geq 3$ 的機率。(6 分)

5. (1)證明 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是發散級數。(5 分)

   (2)證明 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 是收斂級數。(5 分)

6. 設 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ ， $z=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1-\omega^k}{\left|1-\omega^k\right|}$ ，求 $|z|$。