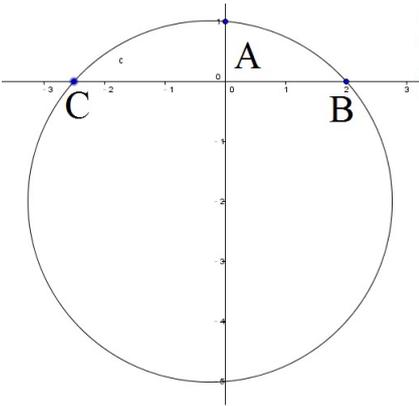


105 永春高中教師甄選 數學科

一、填充題(每題 8 分，共 64 分)

1. 由數字 1 到 9 各出現一次所組成的 9 位數中，能被 11 整除的最大數字為？
2. 設 $n \in \mathbb{N}$ ，請問有幾個 n 能使 $8^n + n$ 是 $2^n + n$ 的倍數？
3. 如圖，設圓 O 通過 $A(0, 1), B(2, 0)$ 和 $C(k, 0)$ 三點，若圓 O 在 C 點的切線斜率為 1，求 k ？



4. 設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 為平面上三個非零向量，已知 $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 6$ ， \vec{a} 在 \vec{b} 的正射影長是 1。若 \vec{c} 滿足 $(\vec{c} - \vec{a})(\vec{c} - \vec{b}) = 0$ ，請問 $|\vec{c}|$ 的最大值為何？
5. 設 $f(x)$ 是一個二次多項式，若 $(x+3)f(x-1) = x^2 + x + xf(x)$ ，請問 $f(x) = ?$
6. 某次學校的考試總共有 15 題，答對題數的部分統計資料如下表。若全體答對四題以上(包含四題)的學生平均答對 6 題，全體答對十題以下(包含十題)的學考平均達對 4 題，則這份統計資料的人數至少為何？

答對題數	0	1	2	3	...	12	13	14	15
人數	7	8	10	21	...	15	6	3	1

7. 有一張 17×21 的稿紙，小明閒來無事，依照下面兩種方法在稿紙填上 $1, 2, \dots, 357$ ：
 - (1) 由第一列開始由左而右填入 $1, 2, 3, \dots, 21$ ，接著第二列填入 $22, 23, \dots, 42$ ，依序填滿整張稿紙。

(2) 由第一行開始由上而下填入 $1, 2, 3, \dots, 17$ ，接著第二列填入 $18, 19, \dots, 34$ ，依序填滿整張稿紙。

以上兩種不同的方法在某些格子會填入相同的數字，求這些數字的總和為？

8. 平面上有兩圓 $C_1 : x^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ ， $C_2 : x^2 + y^2 = a^2$ 及一點 $R(b, 0)$ ， $b > a$ ，自 R 點作 C_1, C_2 的切線。若在第一象限的切點分別為 P, Q ，令 O 為原點， $\angle POQ = \theta$ ，求 θ 的範圍。

二、計算證明題(每題 12 分，共 36 分)

1. 有一個平行四邊形的對角線長分別為 $6, 4\sqrt{2}$ ，若它的邊長都是整數，請計算它的面積和周長。

2. 設 $f(x)$ 滿足 $\int_2^x f(t)dt = 2x^3 - 6x + a$ ，將 $f(x)$ 的圖形和 x 軸包圍的區域繞 x 軸旋轉得一旋轉體，求此旋轉體的體積。

3. 解方程式：

$$\sqrt{x - \frac{1}{48}} + \sqrt{y - \frac{1}{48}} = 1, \sqrt{y - \frac{1}{12}} + \sqrt{z - \frac{1}{12}} = 1, \sqrt{z - \frac{3}{16}} + \sqrt{x - \frac{3}{16}} = 1。$$