

編 號

-----彌-----封-----線-----

第一部分：每格 2 分，共 24 分

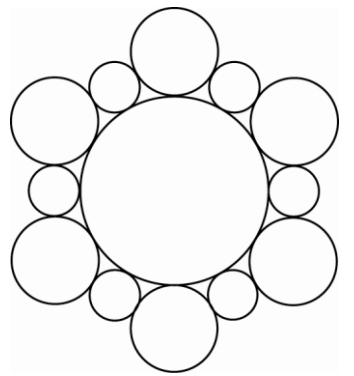
1. 袋中有 3 紅球， 5 黑球， 2 白球， 今由袋中每次取一球不放回， 若取 10 次， 則紅球先取完， 黑球次之， 白球最後取完的機率為_____
2. 從各位數字和等於 43 的五位數中， 任選出一個數， 這個數恰為 11 倍數的機率為_____
3. 設 $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 2$ ， 若 $a + c + e = 7$ ， $b + d = 3$ ， 則 $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 之餘式為_____
4. 若 $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ ， 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 16$ ， $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ， 則 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$ 之絕對值的最大值為_____
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 7$ ， 設其外心為 O ， 垂心為 H ， 則 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值為_____
6. 在坐標平面上， 設 Γ 為所有滿足 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-8)^2} = 16$ 的點 (x, y) 所成的圖形。若圓心為 (a, b) 且半徑為 1 的圓與 Γ 相切， 則 $a^2 + b^2$ 的最大值為 _____。
7. 坐標平面上， 圓 $C: (x-6)^2 + (y-5)^2 = 4$ ， 點 $A(-1, 3)$ ， 設 P 為 x 軸上動點， Q 為圓上 C 動點， 則 $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 的最小值為_____
8. 甲袋有大小相同的紅球 2 顆、白球 1 顆；乙袋中有相同的紅球 1 顆。先從甲袋隨機取 1 球放入乙袋， 然後再隨機從乙袋取出 1 球放入甲袋。重複上述步驟共 n 次以後， 再從甲袋取出紅球的機率為 P_n ， 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$ _____
9. 設 m 為實數， 若曲線 $S: (\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1)(x^2 + y^2 - 4x + 3) = 0$ 與直線 $y = mx - 5$ 在座標平面上恰有 4 個相異交點， 而滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a < m < b$ ， 則 $a+b$ 的值為 _____
10. 坐標平面上， 以直線 $y = mx$ 為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ， 則 m 之值為_____
11. 若 $x > 0$ ， 求滿足 $x^{x^2-4} > (x^x)^3$ 之 x 的範圍為_____
12. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \sin \frac{3\pi}{2n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{2n}]$ 的值為_____

編 號

-----彌-----封-----線-----

第二部分：每格 3 分，共 36 分

1. 設 $f(x)$ 為實係數多項式且滿足 $f(3-i)=7-3i$ ， $f(2)=2$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x^2-6x+10)$ 的餘式為_____
2. 若 $\log_5 144^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{10}} + 2 \times \log_5 144^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{10}} + 3 \times \log_5 144^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{10}} + \dots + 9 \times \log_5 144^{\frac{1}{10}} = a \times \log_5 2 + b \times \log_5 3$ ，則 $a+b$ 之值為_____
3. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 0$ ， $a_2 = 1$ ， $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$ ，則 $a_{106} =$ _____
4. 在平面直角座標系中， O 為原點， $A(-1,0)$ ， $B(0,\sqrt{3})$ ， $C(3,0)$ ，動點 P 滿足 $|\vec{CP}| = 1$ ，則 $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP}|$ 的最大值為_____
5. 袋中有 1~10 號卡片各一張，從中任抽出 2 張，求 2 張數字乘積的期望值為_____
6. 設 z 為複數，且 $|z-1|=2$ ，則 $|z-4-4i|$ 的最大值為_____
7. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 A^{102} 中各元總和為_____
8. 若直線 $y = 3x + a$ 與曲線 $y = x^3 + 2$ 有三相異交點，則 a 的範圍為_____
9. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CA} = 5$ ，若 P 點在 $\triangle ABC$ 內， P 點至 \overline{AB} ， \overline{BC} ， \overline{CA} 距離分別為 x, y, z ，求 $3x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2$ 之最小值為_____
10. 如右圖，是由三種大小圓形組成，其小、中、大圓半徑分別為 r_1, r_2, r_3 ，則 $\frac{r_1}{r_3}$ 的值為_____
11. 設 $f(x) = x^2 + x + 1$ ，求 $\lim_{a \rightarrow 0} (\lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(a+b) - f(a) - f(b) + f(0)}{ab})$ 的值為_____
12. 設 $f(x) = \frac{\prod_{k=0}^{50} (x-2k)}{\prod_{k=1}^{50} (x+k)}$ ，求 $\log_4 f'(0)$ 的值為_____



編 號

-----彌-----封-----線-----

第三部分：每格 4 分，共 40 分

1. 設 $A(0, 0)$, $B(10, 0)$, $C(10, 8)$, $D(0, 8)$ 為坐標平面上的四個點。如果直線 $y = m(x - 5) + 3$ 將四邊形 $ABCD$ 分成左右面積為 3:2 的兩塊，則 m 的值為_____
2. 已知 $|\log_3 x| = ax + b$ 之三個實根成等比且公比為 3，則 b 的值為_____
3. 試求 $f(x) = \int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}} dx$ 的值為_____
4. 有一邊長為 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ ，今沿著它的對角線 \overline{AC} 摺起，使平面 ABC 與平面 ACD 互相垂直，則直線 AB 與直線 CD 間的公垂線段長為_____
5. 已知 $2016+x$ 與 $1824+x$ 均為完全平方數，求滿足此條件的所有正整數 x 為_____
6. 對任意正數 x ，定義函數 $f(x)$ 為四數 $\log x$, $x^2 - 2x + 1$, $2x$, $-x + 1$ 中的最大值，則函數 $f(x)$ 的最小值為_____
7. 設 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ ，若 $2 \sin x \cos y - \sqrt{3} \sin x - \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $x+y$ 的最大值為_____
8. 已知 $\begin{cases} \tan \alpha + \log_3(3 \tan \alpha + 6) = 2 \\ \tan \beta + 3^{\tan \beta - 1} = 4 \end{cases}$ ，求 $\tan \alpha + \tan \beta =$ _____
9. 若 $z \in \mathbb{C}, |z|=1$ ，則 $|z^2 - z + 2|$ 的最小值為_____
10. 設一直線 $y=ax$ 將拋物線 $y=x(3-x)$ 和 x 軸所圍區域的面積平分，則 a 值為_____