

國立臺南女子高級中學 105 學年度第 1 次教師甄選  
數學科筆試答案卷

一、填充題：每題 5 分，共 70 分

1	2	3	4	5
$5 \cdot 2^{98} - 2$	5	1	136	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$
6	7	8	9	10
$\frac{99}{298}$	甲：台中 乙：高雄 丙：台北 丁：台南	5	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	16
11	12	13	14	
$25x + y = 50$	20或-7	5	$(-\frac{5}{2}, 3, \frac{11}{2})$	

二、計算證明題：共 30 分

1.(6 分)由數學歸納法

(1)  $n = 1$ 時， $1 \cdot 1! = 2! - 1$

(2) 設  $n = m$ 時， $\sum_{k=1}^m k \cdot k! = (m + 1)! - 1$ ，

則  $n = m + 1$ 時，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^m k \cdot k! + (m + 1) \cdot (m + 1)! \\ &= (m + 1)! - 1 + (m + 1) \cdot (m + 1)! = (m + 2)! - 1, \end{aligned}$$

由數學歸納法得証

2.(8 分)由 Lagrange 插值公式知

$$f(x) = f(14) \cdot \frac{(x-11)(x-12)}{3 \cdot 2} + f(12) \cdot \frac{(x-11)(x-14)}{1 \cdot (-2)} + f(11) \cdot \frac{(x-12)(x-14)}{3}$$

代入  $x = 15$ , 得

$$f(15) = 2f(14) + (-2)f(12) + f(11)$$

因此， $a + b + c = 1$ 。

3.(8分)設  $d = (a, b-1)$ ，且  $a = dm$ ， $b - 1 = dn$ ，則  $\frac{b-1}{a} = \frac{n}{m}$ ， $\frac{n}{m}$  是最簡分數。

$$\text{依題意 } m + n = a + b - 78 \Rightarrow m + n = dm + (dn + 1) - 78 \Rightarrow (d - 1)(m + n) = 77$$

$$\Rightarrow d - 1 = 1 \text{ 或 } 7 \text{ 或 } 11 \text{ 或 } 77 \Rightarrow d = 2 \text{ 或 } 8 \text{ 或 } 12 \text{ 或 } 78$$

若 $d = 2$ , 則  $m + n = 77 \Rightarrow a + b = m + n = 78 > 100$ , 不合

若 $d = 8$ , 則  $m + n = 11 \Rightarrow a + b = m + n + 78 = 89$

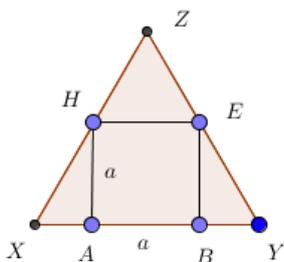
若 $d = 12$ , 則  $m + n = 7 \Rightarrow a + b = m + n + 78 = 85$

若 $d = 78$ , 則  $m + n = 1$ , 不合

因此  $d = 8$  或  $12$ 。

4. (8分) 平面 $ABEH$ 平行正四面體 $PQRS$ 的底面 $QRS$ , 且截此正四體於正三角形

$XYZ$



而 $ABEH$ 為此正三角形之內接正方形,  $\Delta HXA, \Delta EYB$ 皆為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 三角

形, 故 $\overline{XY} = (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})a$

若記正四面體 $PQRS$ 的高為  $h = \sqrt{\frac{8}{3}}$ , 由相似形比例知

$$(h - a) : h = \overline{PX} : \overline{PR} = \overline{XY} : \overline{RS} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) a : 2$$

$$\frac{h - a}{h} = \frac{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)a}{2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)ha = 2h - 2a$$

$$\left(2 + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)h\right)a = 2h$$

$$\text{化簡可得 } a = \frac{2\sqrt{6}}{3 + \sqrt{6} + 2\sqrt{2}}$$