國立台南第二高級中學105學年度第一次教師甄選數學科筆試試題

一、多選題（占10分）(只需將答案寫在答案卷上，並註明題號)

說明：每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯多於1個選項者或所有選項均未作答者，該題以零分計算

1.設 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}$，且 $|z^{n+1}-z^n|=a_n$，其中 n 為正整數，試問下列哪些選項是正確的?

(A)滿足 $z^k>0$ 的最小正整數 k 之值為6　(B) $a_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(C) $a_6>\dfrac{1}{64}$

(D) $<a_n>$ 為等比數列，公比是 $\dfrac{1}{2}$　(E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<1$

2.已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值2，且 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+2}{x-3}=0$．試問下列哪些選項是正確的?

(A) $f(3)=-2$　(B) $f'(3)=0$　(C)方程式 $f(x)=0$ 恰有三相異實根

(D) $f(x)$ 的反曲點為(1,0)　(E) $f(x)$ 在 $x=1$ 處附近的圖形凹口向下

二、填充題（每題5分，共60分）(只需將答案寫在答案卷上，並註明題號)

1.考慮曲線 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_3 x$，以及直線 $x=2^{10}$ 所圍成的區域(包含邊界)，

求該區域中所包含的格子點的個數為__________。

2. $m\in R$，若 $\sqrt{1-x^2}=m(x-2)+2$ 恰有二實根，求 m 之範圍為__________。

3.設 $x=\sqrt{y^2-16}+\sqrt{z^2-16}$，$y=\sqrt{z^2-9}+\sqrt{x^2-9}$，$z=\sqrt{x^2-36}+\sqrt{y^2-36}$，

則 $x+y+z=$__________。

4. 若 $\begin{cases} b_1=\dfrac{1}{4} \\ b_{n+1}+b_n=\dfrac{5}{4^{n+1}}, n\text{是正整數} \end{cases}$，並設 S_n 表示〈 b_n 〉的前 n 項和，

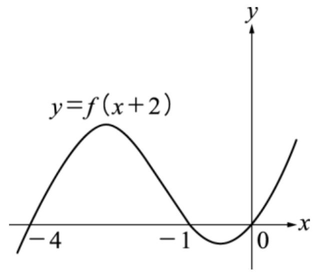
則使得 $\left|S_n-\dfrac{1}{3}\right|\leqq\dfrac{1}{3000}$ 的最小正整數 n 為__________。

5.設 a、b 為正數，若 a^{20} 的整數部分是 32 位數，b^{-30} 的小數點後第 60 位始不為 0，求 $(ab)^{10}$ 的整數部分是幾位數？_______

6.設平面上三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 滿足 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 且 $|\vec{a}|=20$，$|\vec{b}|=15$，$|\vec{a}-\vec{b}|=7$，求 $\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 上的正射影長為_________。

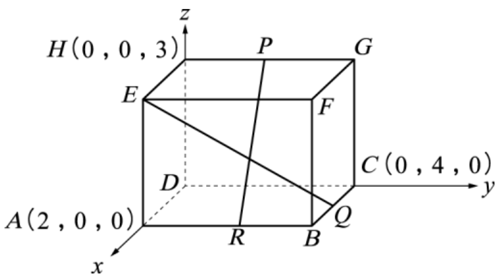
7.設有一 3×3 單位正方形所成的方格(由 9 個邊長為 1 的正方形所構成的大正方形)，每一個單位正方形都要塗上藍色或紅色，兩種顏色被使用的機率都相等，若 3×3 單位正方形所成的方格中，沒有任何一個 2×2 單位正方形所成的方格為紅色的機率為_________。

8. 已知三次函數 $y=f(x+2)$ 的圖形如右圖，則不等式 $(x-3)f(x)<0$ 的解為________。



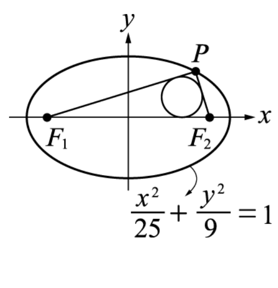
9.右圖是空間坐標中的一個長方體，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=2$，$\overline{AE}=3$。P，Q 分別為長方體 $\overline{GH}$ 與 $\overline{BC}$ 上的中點，R 為邊 $\overline{AB}$ 上一點，

若 $\overline{EQ}$ 與 $\overline{PR}$ 相交於一點，試求 $\overline{AR}:\overline{RB}=$________。

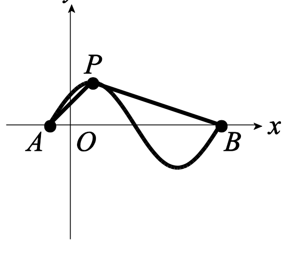


10.設橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上有一點 P 位於第一象限，兩焦點為 F_1 與 F_2，若 $\triangle PF_1F_2$ 的內切圓半徑為 1，

則 P 點的坐標為________。



11.函數 $y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的部分圖形如圖所示．已知 P 為圖形的最高點，A，B 為圖形與 x 軸的交點，求 $\tan\angle APB=$________。



12. 若複數 z_1，z_2 同時滿足下列兩個條件：

(1) $|z-8|=6$，

(2) $|z+1|=|z-i|$，

求 $|z_1-z_2|=$________。

三、計算證明題（占 30 分）(需將演算過程寫在答案卷上，並註明題號)

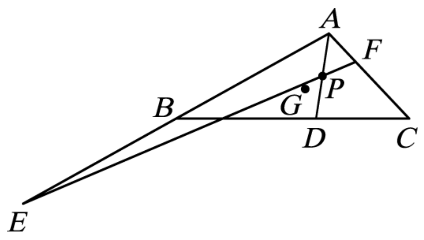
1. 如右圖，△ABC 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{CA}=4$。

已知 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$，$D$ 為 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{AD}$ 平分 $\angle CAB$，

若 P 為 $\overline{AD}$ 中點且 $\overleftrightarrow{PE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F，

G 為△ABC 之重心，而 $\overrightarrow{PG}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{DE}$，

則數對（x，y）為何？(7 分)



2. $a_n=(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^5+2^5+\cdots+n^5)$，$b_n=(1^3+2^3+\cdots+n^3)(1^4+2^4+\cdots+n^4)$

則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=$ 為何？(7 分)

3.甲、乙兩人以「剪刀、石頭、布」猜拳 5 次，兩人的策略都是：

如果這一次出拳猜贏，下一次出相同的拳；

如果這一次出拳猜輸，下一次從另外兩拳擇一出拳，兩拳的選擇機率相同；

如果這一次出拳平手，下一次從「剪刀、石頭、布」擇一出拳，且選擇的機率相同。

若第一次甲猜贏，求第四次兩人平手的機率？(8 分)

4. 一張紙上面有半徑為 R 的圓 O 和圓內一定點 A，且 $\overline{OA}=a$，摺疊紙片使圓周上某一點 A' 剛好與 A 重合，這樣每一種折法都留下一條直線摺痕，當 A' 取遍圓周上所有點時，則所有摺痕所在的直線上的點所成的圖形為何？並證明之。(8 分)

國立台南第二高級中學105學年度第一次教師甄選數學科筆試試題

答案卷

一、多選題（占10分）

說明：每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯多於1個選項者或所有選項均未作答者，該題以零分計算

1.	2.
(A)(B)(D)(E)	(A)(B)(C)(D)