

105 武陵高中教師甄選 數學科

一、填充題(每題 5 分，共四十分)

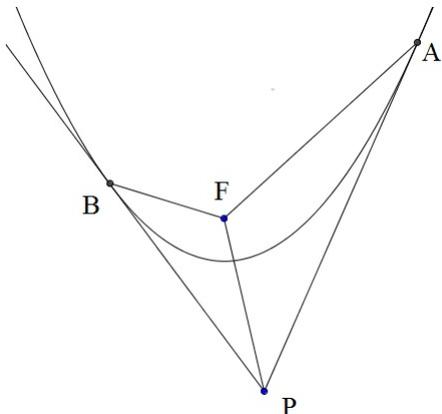
1. 設 $2 \leq n \leq 1999$ ，試問有多少個正整數 n ，使得存在大於 1 的正整數 a, b 且滿足 $\log_a n = b$?
2. 因應武陵高中校慶，校方準備了 m 個禮物要在 n 天發完，發法如下：第一天先發一個，在從剩餘的 $m - 1$ 個禮物選 $\frac{1}{7}$ 送出去；第二天先送出兩個，在從剩餘的禮物中挑 $\frac{1}{7}$ 發出去。按照此發法，在第 n 天的時候發出 n 個剛好全部發完，請問數對 $(m, n) = ?$
3. 空間中有四點 $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3), D(0, 0, 0)$ ，設點 E 所在的平面到 A, B, C, D 四點的距離均為 d ，請寫出 d 的所有可能值。
4. 設 x, y, z 為正整數，且 $xyz = 2^{12} \cdot 3^2$ ，求 $x + y + z$ 可以被 4 整除的機率。
5. 投擲一顆公正的骰子直到連續三次出現相同的數字後停止，求投擲次數的期望值。
6. 投擲一枚不公正的硬幣 10 次，假設正面出現的機率為 p ，設 p_k 為出現 k 次正面的機率。已知 $p_4 = 4p_6$ ，試求 $p_1 + 3p_2 + 5p_3 + \cdots + 17p_9 + 19p_{10}$ 。(本題可用指數形式表示)
7.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{4n^2 - 1^2}{36n^4}} + \sqrt{\frac{4n^2 - 2^2}{36n^4}} + \cdots + \sqrt{\frac{4n^2 - n^2}{36n^4}} \right) = ?$$
8. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 且 $f(3 + 4i) = 75i - 100, f(7 - 24i) = 7 + 24i$ ，請問 $d = ?$

二、計算證明題(每題 10 分，共 80 分)

1. 設 $ABCD$ 為一凸四邊形，證明 $\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} \geq \overline{AC} \times \overline{BD}$ ，並說明等號成立的條件。
2. 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle A = \theta$ 和內切圓半徑 r 為定值，請問在此條件下， $\triangle ABC$ 的周長最小為何？

3. Let A, B, C be $m \times n, n \times p$, and $p \times q$ matrices respectively. Prove that $(AB)C = A(BC)$.

4. 設 Γ 為一拋物線， P 為 Γ 外一點， F 為焦點。自 P 作 Γ 的切線，令其切點為 A, B ，證明 $\angle AFP = \angle BFP$ 。



5. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3ax - 3a + 3, a \in \mathbb{R}$ ，試就 a 的範圍討論 $|f(x)|$ 在 $x \in [0, 2]$ 的最大值。

6. 設 $\triangle ABC$ 的邊長均為正整數，且全等的三角形視為同一種，則：

(A) 周長為 2013

(B) 周長為 2016

A 和 B 情況那一個的三角形比較多種，為什麼？

7.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n + n^2m + 2mn} = ?$$

8. 敘述並證明整係數一次因式檢驗法。