

國立竹北高中 105 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選數學科試題

壹：填充題(必需填寫在答案欄，共 12 題，每題 5 分，共 60 分)

1. 設複數平面上的相異四點 z_1, z_2, z_3, z_4 依序且依順時針方向可連成一個正方形。

則 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ 之值為_____。

2. 設 $\frac{1}{p} + \frac{1}{3q} = 12$ ，其中 p, q 為正數，則 $3 \log_{\frac{1}{3}} p + \log_{\frac{1}{3}} q$ 的最大值為_____。

3. $\sqrt{(x-1)^2 + (2^x - 4)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (2^x)^2}$ 之最小值為_____。

4. 有一個四面體 $OABC$ ，它的一個底面 ABC 是邊長為 4 的正三角形，且知

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a$ ；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長 (亦即此兩直線間的距離) 是 $\sqrt{3}$ ，則 $a =$ _____ (以最簡分數表示)。

5. 設多項式 $(x-1)^{20}$ 除以 x^2+1 的餘式為 $px+r$ ，其中 p, r 都是實數，

則數對 $(p, r) =$ _____。

6. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 3$ ，過 A 點作直線 BC 的垂直線，設垂足為 H ，

若 $\overrightarrow{AH} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$ ，則 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為_____。

7. 若 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ，而 $\cot \frac{\alpha}{2}, \cot \frac{\beta}{2}, \cot \frac{\gamma}{2}$ 成等差數列，則 $\cot \frac{\alpha}{2} \times \cot \frac{\gamma}{2} =$ _____。

8. 若橢圓二焦點為 $F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0)$ ，切線 L 為 $x+y=5$ ，求此橢圓方程式為_____。

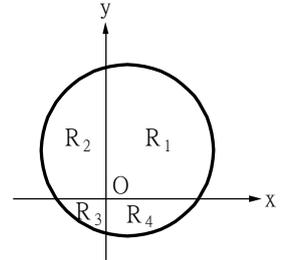
9. 不等式 $\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2 > 0$ 的解是_____。

10. 設曲線 $C: y^2 = ax$ ，直線 $L: py = x (a > 0, p > 0)$ ，若 C 與 L 所圍的圖形繞 x 軸旋轉，

求此旋轉體的體積為_____。

11. 設 m 為實數。若圓 $x^2 + y^2 - 4x - 7y + 10 = 0$ 與直線 $y = m(x - 3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍為_____。

12. 在坐標平面上有一個圓，其圓心坐標為 $(5, 12)$ 且半徑為 20，若此圓分布在第一、二、三、四象限內的區域面積分別為 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 (如附圖所示)，則 $R_1 - R_2 + R_3 - R_4$ 之值 = _____。



貳：非選擇題(需寫出計算過程，共 5 題，共 40 分)

注意：需按照題號依次作答，計算題目需列出計算過程，否則不計分。

- 一項調查想了解新竹地區高中生擁有手機的學生比例，民調公司想在 99.7% 的信心水準下，抽樣誤差為 $\pm 3\%$ ，試問這次民調至少需要多少成功的樣本？(6 分)
- 設 $x^5 - 1 = 0$ 的 5 個根在複數平面上對應到 A, B, C, D, E 五個點，試求 $\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \overline{AE}$ 。(6 分)

3. 若對任意實數 x ， $f(x) = x^4 - 4p^3x + 12$ 恆正，則 p 值的範圍為？(6 分)

4. 設無窮數列 $\{a_n\}$ 符合 $a_0 = 0$ 且當 $n \geq 1$ 時， a_n 滿足 $a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{當 } n \text{ 為偶數} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{當 } n \text{ 為奇數} \end{cases}$

(1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ 的值。(5 分)

(2) 證明：當 $n \geq 0$ 時 $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$ 。(5 分) 並依此說明對於所有正整數 n ，不等式 $-\frac{1}{8} \leq a_{2n} < 0$ 恆成立。(2 分)

5. (1) 設 n, k 都是正整數且 $n \geq k \geq 2$ ，試證明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$ 。(5 分)

(2) 設計一個情境式的敘述說明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$ 。(5 分)