2016（第 17 屆）AMC10A 試題

俞克斌老師編寫

1. 試求$\dfrac{11!-10!}{9!}$之值爲何？（註：$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$）
(A) 99　(B) 100　(C) 110　(D) 121　(E) 132　【2016AMC10A】

答：(B)

解：$\dfrac{11!-10!}{9!}=\dfrac{10!\times(11-1)}{9!}=10\times10=100$

2. 滿足$10^{x}\cdot100^{2x}=1000^{5}$的$x$之值爲？
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) 5　【2016AMC10A】

答：(C)

解：$10^{x}\cdot10^{4x}=10^{15}\Rightarrow x+4x=15\Rightarrow x=3$

3. 大衛與賓去買同樣多的貝果（硬麵包圈），賓每付 1 美元，大衛就少付 25 美分（1 美元等於 100 美分）。若賓比大衛多付了 12.50 美元，則他們兩人共花了多少美元？
(A) 37.50　(B) 50.00　(C) 87.50　(D) 90.00　(E) 92.50　【2016AMC10A】

答：(C)

解：$\underbrace{\dfrac{1250}{25}}_{\text{賓比大衛多付的次數}}\times\underbrace{(1+0.75)}_{\text{每次賓與大衛實際付出的總金額}}=87.5$

4. 對於所有的實數x及y，其中$y\neq0$，定義剩餘函數爲$rem(x,y)=x-y\left[\dfrac{x}{y}\right]$，這裡$\left[\dfrac{x}{y}\right]$是小於或等於$\dfrac{x}{y}$的最大整數。試問$rem\left(\dfrac{3}{8},-\dfrac{2}{5}\right)$之值爲何？
(A) $-\dfrac{3}{8}$　(B) $-\dfrac{1}{40}$　(C) 0　(D) $\dfrac{3}{8}$　(E) $\dfrac{31}{40}$　【2016AMC10A】

答：(B)

解：$rem\left(\dfrac{3}{8},-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{3}{8}-\left(\dfrac{-2}{5}\right)\times\left[\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{-2}{5}}\right]=\dfrac{3}{8}+\dfrac{2}{5}\times\left[\dfrac{15}{-16}\right]=\dfrac{3}{8}+\dfrac{2}{5}\times(-1)=\dfrac{-1}{40}$

5. 若某個長方體盒子的邊長均爲整數，且邊長比爲$1:3:4$，則下列何者可以是此盒子的體積？
(A) 48　(B) 56　(C) 64　(D) 96　(E) 144　【2016AMC10A】

答：(D)

解：體積$=t\times3t\times4t=12t^{3}=12\times2^{3}=96$

6. 小美列出 1 到 30 所有的整數，小龍複製小美列出的所有整數，
並將原出現數字是 2 的都改爲 1。小美將她所列的數加起來，
小龍也將他更改過的數加起來。試問小美所得的和比小龍所得的和大多少？
(A) 13 (B) 26 (C) 102 (D) 103 (E) 110 【2016AMC10A】

答：(D)

解：02 改爲 01 $\Rightarrow$ 差 1
12 改爲 11 $\Rightarrow$ 差 1
20、21 改爲 10、10 $\Rightarrow$ 差 $10\times 2=20$
22 改爲 11 $\Rightarrow$ 差 11
23～29 改爲 13～19 $\Rightarrow$ 差 $10\times 7=70$
合計「差 103」

7. 若 $60,100,x,40,50,200,90$ 這 7 個數的平均數、中位數與眾數都等於 x，
則 x 之值爲何？
(A) 50 (B) 60 (C) 75 (D) 90 (E) 100 【2016AMC10A】

答：(D)

解：$x=\frac{1}{7}\left(40+50+60+x+90+100+200\right)\Rightarrow x=90$

8. 一隻有策略的兔子與一隻笨狐狸一致同意：「狐狸每次通過兔子家旁的橋，
狐狸的錢將加倍，同時狐狸需再付 40 個銅板給兔子當作過橋費。」
之後，每次通過橋，狐狸的銅板加倍後都需再付過橋費。
狐狸原來很高興牠的好運，直到發現牠通過橋三次後，所有的銅板恰好都用完了。
試問狐狸原來有多少個銅板？
(A) 20 (B) 30 (C) 35 (D) 40 (E) 45 【2016AMC10A】

答：

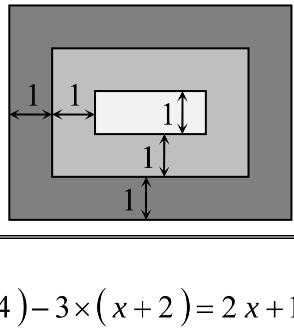
解：$\left[\left(2x-40\right)\times 2-40\right]\times 2-40=0\Rightarrow\left[\left(2x-40\right)\times 2-40\right]=20\Rightarrow\left(2x-40\right)=30\Rightarrow x=35$

9. 一個用 2016 個銅板所排成的三角形陣列，
第一列排放 1 個銅板，第二列排放 2 個銅板，第三列排放 3 個銅板，
依此繼續排放，直到第 N 列排放 N 個銅板恰好排完。試問 N 各個位數的數字和爲多少？
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10 【2016AMC10A】

答：(D)

解：$\frac{N\left(N+1\right)}{2}=2016\Rightarrow N=63$，則 N 各個位數的數字和爲 $6+3=9$

10. 有一塊由三種不同顏色製成的地毯，如圖所示。
這三種不同顏色的區域面積成等差數列。
最內層長方形的寬爲 1 公尺，
其他兩種色彩較暗區域距離較淺顏色四邊的寬也都是 1 公尺。
試問最內層長方形的長是多少公尺？
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8 【2016AMC10A】



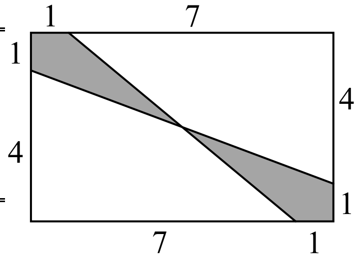
答：(B)

解：白色區 $1\times x$、淺灰區 $3\times\left(x+2\right)-1\times x=2x+6$、深灰區 $5\times\left(x+4\right)-3\times\left(x+2\right)=2x+14$
三種不同顏色的區域面積成等差數列，故 $\left(x\right)+\left(2x+14\right)=2\left(2x+6\right)\Rightarrow x=2$

11. 如圖，在此 8×5 的長方形中陰影區域的面積爲多少？

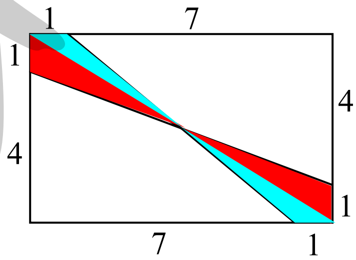
(A) $4\frac{3}{4}$　(B) 5　(C) $5\frac{1}{4}$　(D) $6\frac{1}{2}$　(E) 8

【2016AMC10A】



答：(D)

解：$1\times(7+1)\times\frac{1}{2}+1\times(4+1)\times\frac{1}{2}=\frac{8+5}{2}=6\frac{1}{2}$



12. 從 1 到 2016 的整數中隨意地選出三個不同的整數，若這三個數的乘積爲奇數的機率爲 p，則下列何者正確？

(A) $p<\frac{1}{8}$　(B) $p=\frac{1}{8}$　(C) $\frac{1}{8}<p<\frac{1}{3}$　(D) $p=\frac{1}{3}$　(E) $p>\frac{1}{3}$

【2016AMC10A】

答：(A)

解：$\underbrace{\frac{1008}{2016}}_{\text{第一數爲奇數的機率}}\times\underbrace{\frac{1007}{2015}}_{\text{第二數爲奇數的機率}}\times\underbrace{\frac{1006}{2014}}_{\text{第三數爲奇數的機率}}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

13. 某電影院中有五個朋友坐在五個位置一排的座位上，
這五個座位由左至右編號從 1 到 5（此處的『左』及『右』是他們坐好時，
從觀察者面對他們的觀點而言）。在電影播放中「甲」去大廳買爆米花。
當她回來時發現「乙」向右挪了兩個位子，「丙」向左移了一個位置，
且「丁」與「戊」交換了座位，而將最旁邊的位子留給「甲」。
試問「甲」在去買爆米花前原來坐在幾號的位子上？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) 5　【2016AMC10A】

答：(B)

解：原來爲 乙 甲 丙 丁 戊

後來爲 甲 丙 乙 戊 丁

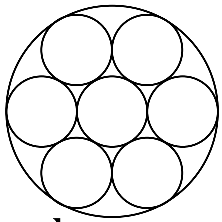
14. 試問 2016 表示成若干個 2 及若干個 3 的和，而不考慮加法順序的方法數總共有多少種？
（例如，$1008\cdot2+0\cdot3$ 及 $402\cdot2+404\cdot3$ 是其中兩種方法。）

(A) 236　(B) 336　(C) 337　(D) 403　(E) 672　【2016AMC10A】

答：(C)

解：$\begin{cases}2016=2\times1008+0\times3\\2016=2\times1005+2\times3\\2016=2\times1002+4\times3\\\cdots\\2016=2\times0+672\times3\end{cases}$，共 337 組答案

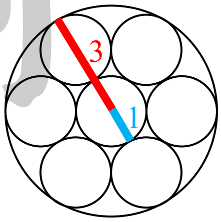
15. 如圖，從製作餅乾的圓形麵糰上切下七個半徑爲 1 公寸的圓形餅乾，相鄰的餅乾比此外切，且除了中間那塊餅乾外，其餘的餅乾都與麵糰的邊緣相切。將麵團剩下的碎片再重新揉製成一塊厚度與原來相同的圓形餅乾。試問重新製成的餅乾之半徑爲多少公寸？



(A) $\sqrt{2}$　(B) 1.5　(C) $\sqrt{\pi}$　(D) $\sqrt{2\pi}$　(E) π　【2016AMC10A】

答：(A)

解：$\underbrace{\pi\times 3^2}_{\text{大圓面積}}-\underbrace{7\times\pi\times 1^2}_{\text{七個小圓面積}}=\underbrace{\pi\times r^2}_{\text{剩餘新圓面積}}\Rightarrow r=\sqrt{2}$



16. 某個三角形的頂點座標爲 $A(0,2)$、$B(-3,2)$、$C(-3,0)$，將此三角形以 x 軸爲對稱軸作鏡射得到 $\Delta A'B'C'$，再將 $\Delta A'B'C'$ 以原點爲中心，逆時針方向旋轉 $90°$ 得到 $\Delta A''B''C''$。試問下列哪一個敘述能將 $\Delta A''B''C''$ 變換回原來的 ΔABC？

(A) 以原點爲中心，逆時針方向旋轉 $90°$　(B) 以原點爲中心，順時針方向旋轉 $90°$

(C) 以 x 軸爲對稱軸作鏡射　(D) 以直線 $y=x$ 爲對稱軸作鏡射

(E) 以 y 軸爲對稱軸作鏡射　【2016AMC10A】

答：(D)

解：原座標 $(x,y)\xrightarrow{\text{關於}x\text{軸作對稱}}$ 新座標 $(x,-y)\xrightarrow{\text{逆時針轉 }90°}$ 更新座標 (y,x) $\xrightarrow{\text{關於}y=x\text{作對稱}}$ 最後座標 (x,y)

17. 設 N 爲 5 的倍數。一個紅球與 N 個綠球隨意地排在一直線上。令 $P(N)$ 表示至少有 $\frac{3}{5}$ 的綠球排在紅球同一側的機率。顯然 $P(5)=1$，且當 N 非常大時 $P(N)$ 趨近於 $\frac{4}{5}$。試問使得 $P(N)<\frac{321}{400}$ 最小的 N，其各位數的數字和爲多少？

(A) 12　(B) 14　(C) 16　(D) 18　(E) 20　【2016AMC10A】

答：(A)

解：令 $N=5t$，將全部位置編號爲 $1\sim(5t+1)$

當紅球位於 $1\sim(2t+1)$ 號，或 $(3t+1)\sim(5t+1)$ 號時，至少有 $\frac{3}{5}$ 綠球在紅球同一側

故 $P(N)=\frac{(2t+1)\times 2}{5t+1}<\frac{321}{400}\Rightarrow 5t>479\Rightarrow N>479\Rightarrow N$ 取 480

18. 在正立方體的各頂點標上數字 1 至 8，每個數字只用一次，且使得各個面上四個頂點的數字和都相等。各頂點安排的數字能由旋轉正立方體而得到相同狀況都視爲一樣的安排。試問有多少種不同安排頂點數字的方法？

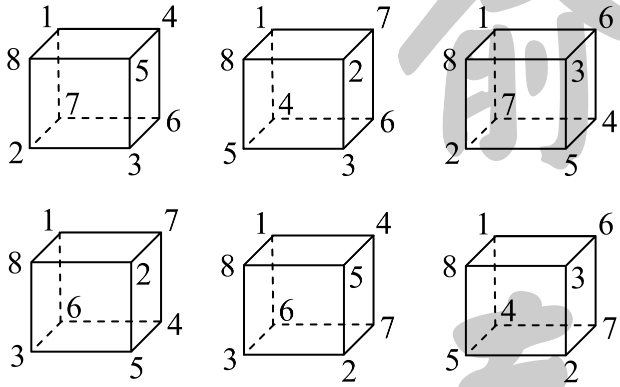
(A) 1　(B) 3　(C) 6　(D) 12　(E) 18　【2016AMC10A】

$\boxed{答}$：(C)

$\boxed{解}$：每一個數會在三個面上出現，故每一個面數字總和為 $\dfrac{3\left(1+2+3+...+8\right)}{6}=18$

而序對 $\left(1+8\right)=\left(7+2\right)=\left(6+3\right)=\left(4+5\right)=9$，共有 $\dfrac{4!}{4}=6$ 種環狀排列可能

即



19. 長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=6$、$\overline{BC}=3$。點 E 在 B 與 C 之間，點 F 在 E 與 C 之間，
使得 $\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FC}$，$\overline{AE}$ 與 $\overline{AF}$ 分別交 $\overline{BD}$ 於點 P 及點 Q。
若 $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QD}$ 可以表示為 $r:s:t$，其中 r、s、t 均為正整數，
且它們的最大公因數為 1，則 $r+s+t$ 之值為何？
(A) 7　(B) 9　(C) 12　(D) 15　(E) 20　【2016AMC10A】

$\boxed{答}$：(E)

$\boxed{解}$：令 $B\left(0,0\right)$、$A\left(6,0\right)$、$E\left(0,1\right)$、$F\left(0,2\right)$、$C\left(0,3\right)$、$D\left(6,3\right)$

$\overleftrightarrow{BD}$：$y=\dfrac{1}{2}x$、$\overleftrightarrow{AE}$：$\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{1}=1$、$\overleftrightarrow{AF}$：$\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}=1$

$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{AE}$ 交於 $P\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4}\right)$、$Q\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{6}{5}\right)$

故 $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QD}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}:\dfrac{9\sqrt{5}}{20}:\dfrac{9\sqrt{5}}{5}=5:3:12$，則 $r+s+t=5+3+12=20$

20. 某個特殊的正整數 N，可使得 $\left(a+b+c+d+1\right)^{N}$ 的展開式中，
合併同類項後發現同時含有 a,b,c,d 四個變數正整數乘冪的項恰好有 1001 項。
試問 N 之值為何？
(A) 9　(B) 14　(C) 16　(D) 17　(E) 19　【2016AMC10A】

$\boxed{答}$：(B)

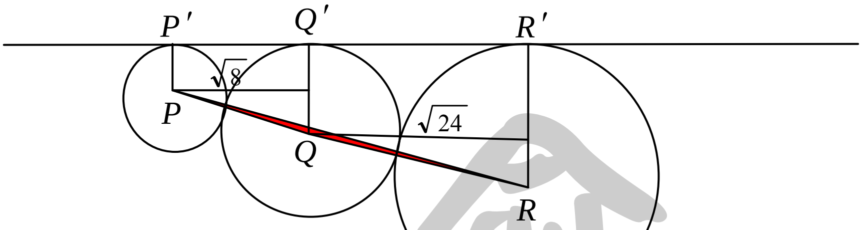
$\boxed{解}$：所求 $=H^{5}_{N-4}=C^{N}_{N-4}=C^{N}_{4}=\dfrac{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\left(N-3\right)}{4\times3\times2\times1}=1001$

$\Rightarrow N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\left(N-3\right)=7\times11\times13\times4\times3\times2\times1=\left(14\right)\times\left(13\right)\times\left(12\right)\times\left(11\right)$，故 $N=14$

21. 分別以 P、Q、R 為圓心，1、2、3 為半徑的三個圓都在直線 l 的同側，
分別與直線 l 切於 P'、Q'、R' 三點，且點 Q' 介於點 P' 與 R' 之間。
若圓 Q 分別與圓 P 和圓 R 外切，則 ΔPQR 的面積為多少？
(A) 0　(B) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　(C) 1　(D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　(E) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$　【2016AMC10A】

$\boxed{答}$：(D)

$\boxed{解}$：



$$\underbrace{\frac{(1+2)\times 2\sqrt{2}}{2}}_{梯形PP'Q'Q面積}+\underbrace{\frac{(2+3)\times 2\sqrt{6}}{2}}_{梯形QQ'R'R面積}-\underbrace{\frac{(1+3)\times\left\lfloor 2\sqrt{2}+2\sqrt{6}\right\rfloor}{2}}_{梯形PP'R'R面積}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

22.若有正整數n使得$110\cdot n^3$有 110 個正因數，其中正因數包含 1 及$110\cdot n^3$，則$81\cdot n^4$有多少個正因數？

(A) 110 (B) 191 (C) 261 (D) 325 (E) 425 【2016AMC10A】

$\boxed{答}$：(D)

$\boxed{解}$：110 個正因數$=2\times5\times11$個正因數，

表$110\cdot n^3=2^1\times5^4\times11^{10}$（或$2^1\times5^{10}\times11^4$或$2^4\times5^1\times11^{10}$或$2^4\times5^{10}\times11^1$

或$2^{10}\times5^1\times11^4$或$2^{10}\times5^4\times11^1$）

故$n=5^1\times11^3$（或$5^3\times11^1$或$2^1\times11^3$或$2^1\times5^3$或$2^3\times11^1$或$2^3\times5^1$）

則$81\cdot n^4=3^4\times5^4\times11^{12}$（或$3^4\times5^{12}\times11^3$或$3^4\times2^4\times11^{12}$或$3^4\times2^4\times5^{12}$

或$3^4\times2^{12}\times11^4$或$3^4\times2^{12}\times5^4$）

則$81\cdot n^4$有$5\times5\times13=325$個正因數

23.某運算$\Box$對所有的非零實數a、b、c滿足：$a\Box(b\Box c)=(a\Box b)\cdot c$

（此處“$\cdot$”是一般的乘號），且$a\Box a=1$。若方程式$2016\Box(6\Box x)=100$的解爲$\dfrac{p}{q}$，

其中p、q爲互質的正整數，則$p+q$之值爲何？

(A) 109 (B) 201 (C) 301 (D) 3049 (E) 33601 【2016AMC10A】

$\boxed{答}$：(A)

$\boxed{解}$：$a\Box(b\Box c)=(a\Box b)\cdot c$，其實代表$\dfrac{a}{\frac{b}{c}}=\dfrac{a}{b}\cdot c$，亦即運算$\Box$代表除法

故$2016\Box(6\Box x)=100\Rightarrow\dfrac{2016}{6}\cdot x=100\Rightarrow x=\dfrac{600}{2016}=\dfrac{25}{84}$，故$p+q=25+84=109$

24.某個四邊形內接於一個半徑爲$200\sqrt{2}$的圓。若有三個邊的邊長都是 200，則此四邊形第四個邊的邊長爲多少？

(A) 200 (B) $200\sqrt{2}$ (C) $200\sqrt{3}$ (D) $300\sqrt{2}$ (E) 500 【2016AMC10A】

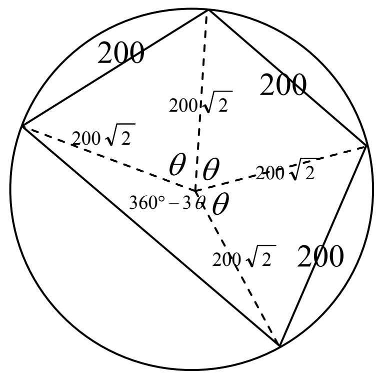
$\boxed{答}$：(E)

$\boxed{解}$：$\cos\theta = \dfrac{\left(200\sqrt{2}\right)^2 + \left(200\sqrt{2}\right)^2 - \left(200\right)^2}{2\left(200\sqrt{2}\right)\left(200\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3}{4}$

$\cos 3\theta = 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 - 3\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{-9}{16}$

$\cos\left(360° - \theta\right) = \dfrac{\left(200\sqrt{2}\right)^2 + \left(200\sqrt{2}\right)^2 - x^2}{2\left(200\sqrt{2}\right)\left(200\sqrt{2}\right)} = \dfrac{-9}{16}$

故 $x = 500$



25.有多少個正整數三元組(x,y,z)滿足$lcm(x,y)=72$，$lcm(x,z)=600$， 且$lcm(y,z)=900$？（其中$lcm(a,b)$是a與b的最小公倍數） (A) 15 (B) 16 (C) 24 (D) 27 (E) 64 【2016AMC10A】

$\boxed{答}$：(A)

$\boxed{解}$：$lcm(x,y)=72=2^3\times 3^2 \Rightarrow x=2^a\times 3^b$，$y=2^c\times 3^d$

$\Rightarrow \max(a,c)=3$、$\max(b,d)=2$

$lcm(x,z)=600=2^3\times 3^1\times 5^2 \Rightarrow x=2^a\times 3^b$，$z=2^e\times 3^f\times 5^2$

$\Rightarrow \max(a,e)=3$、$\max(b,f)=1$

$lcm(y,z)=900=2^2\times 3^2\times 5^2 \Rightarrow y=2^c\times 3^d$，$z=2^e\times 3^f\times 5^2$

$\Rightarrow \max(c,e)=2$、$\max(d,f)=2$

由$\max(a,c)=3$、$\max(a,e)=3$、$\max(c,e)=2$得知：$a=3$

此時序對$(c,e)=(2,2)$或$(2,1)$或$(2,0)$或$(1,2)$或$(0,2)$

由$\max(b,d)=2$、$\max(b,f)=1$、$\max(d,f)=2$得知：$d=2$

……此時序對$(d,f)=(1,1)$或$(1,0)$或$(0,1)$

對應序對(c,e)、(d,f)，總共有$5\times 3=15$種組合