



2015 年 ARML 美國地區數學聯賽台灣選拔賽

團體賽

T-1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle BAC = 80^\circ$ ， P 為內部一點滿足 $\angle PAB = \angle PBA = 10^\circ$ ，試求： $\angle APC$ 的大小。

T-2. 已知下列算式之值可以寫成 m^n 的表示法，其中 m 與 n 為大於1的正整數，試求： $m+n$ 之值。

$$\prod_{k=1}^{45} \sec^2(2k-1)^\circ = \sec^2 1^\circ \sec^2 3^\circ \sec^2 5^\circ \cdots \sec^2 89^\circ = m^n$$

T-3. 若由1, 2, 3, 4所組成的 n 位數，且1與2不相鄰，這種 n 位數有 a_n 個，則 $\left[\frac{a_{2016}}{a_{2015}}\right]$ 之值為何？（ $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。）

T-4. 將 $100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ 表示成十進位，自右邊數起劃去24個0之後，最末三位數為何？

T-5. 已知 x, y, z 均為非負實數，且滿足 $xyz + x + z = y$ ，試求下列算式的最大值。

$$\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+y^2} + \frac{3}{1+z^2}$$

T-6. 已知多項式 $f(x)$ 的各項係數均為不大於3的非負整數，且滿足 $f(2) = 2016$ 。像這樣的多項式一共有若干個？

T-7. 已知 P 為質數，且滿足 $P+1$ 為正整數 n 的倍數； z 為滿足 $z^P = 1$ 的非實數，試求下列算式之值。

$$\frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \frac{1}{1+z^k + z^{2k} + z^{3k} + \cdots + z^{(n-1)k}}$$

T-8. 一等腰直角三角形內部有一點至三個頂點的距離分別為 1, 2, 3, 試求：該等腰直角三角形的最大可能面積。

T-9. 令 $S = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$, 從 S 選取子集合 M , 則滿足下列條件的子集合 M 一共有若干個？

(a) 在 M 中任意兩數相差均大於 1。

(b) 若 M 中有 k 個數, 則 M 中每個數均不小於 k 。

T-10. 已知 a, b, c 均為實數, 且 $a + b + c = 1$, 則

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 - 1}{a^3 + b^3 + c^3 - 1} = m(a^2 + b^2 + ab - a - b + 1)$$

利用上列結果試解下列方程：

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 9(a^5 + b^5 + c^5) - 10(a^3 + b^3 + c^3) + 1 = 0 \end{cases}$$

求： $m^2 + a^2 + b^2 + c^2$ 之值。