2015年ARML美國地區數學聯賽台灣選拔賽

思 考 賽

對一般性的函數 $f(x)$ 定義差分運算 $D_\alpha[f](x)=f(x+\alpha)-f(x)$，其中 α 為一非負實數；若 $\alpha=1$，則該運算可簡寫成 $D[f]$。請同學按照前述的定義依序回答下列問題。

1. 若 $0<\beta<\alpha$，試證明：$D_\alpha[f](x)=D_{\alpha-\beta}[f](x+\beta)+D_\beta[f](x)$。

2. 證明下列等式成立。

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_\alpha[f](x+k\alpha)=D_{n\alpha}[f](x)$$

3. 利用上列結果除一次多項式之外，試舉例一函數 $f(x)$，滿足 $D_n[f](x)=n$，對任意正整數 n 及實數 x 均成立。

4. 對任意函數 $f(x)$ 與 $g(x)$，試證明：

$$\begin{aligned} &D_\alpha[f](x)\cdot g(x+\alpha)-f(x+\alpha)\cdot D_\alpha[g](x) \\ &=D_\alpha[f](x)\cdot g(x)-f(x)\cdot D_\alpha[g](x) \end{aligned}$$

5. 若將 D_α 連續作用 n 次，且寫成 $D_\alpha[D_\alpha[\cdots[D_\alpha[f]]\cdots]]=D_\alpha^n[f]$，依照 $D_\alpha[f]$ 的定義可得

$$D_\alpha^n[f]=\sum_{k=0}^{n} a_k f(x+k\alpha)$$

試求：$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$ 以及 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$ 之值。

(背面尚有試題，請翻面作答)

6. 令 $f(x)=x^n$ ，試計算： $D_\alpha^n[f](x)$ 及 $D_\alpha^{n+1}[f](x)$ 。

7. 已知 $f(1)=\dfrac{1}{2}$ ，且 $D[x^2 f](x)=f(x+1)$ ，試求下列算式之值。

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$$

8. 已知 $f(1)=1$，且 $D^2[f](x)=f(x)+(1+x)(1+2^{x+1})$ 。若對任意 $n\ge M$ ，不等式 $2<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<3$ 均成立，試求：M 的最小正整數值。

以上問題多為差分運算的基礎性質運用，利用 5.及 6.的結果，我們很容易得知對任意 n 次多項式 $f(x)$ 以下等式均成立。

$$n!\alpha^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(x+k\alpha)\text{，其中}\alpha\text{為任意實數。}$$

各位同學在回答下列問題時，以上結論可直接引用。

9. 已知下列條件成立，

$$\prod_{i=1}^{n}(k+a_i)=\frac{k}{n}\text{ ， }k=0\text{ ，}1\text{，}2\text{，}3\text{，}\cdots\text{， }n-1$$

試求：$(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)\cdots(n+a_n)$ 之值。

10. 已知實數 a_1 ， a_2 ， a_3 ， a_4 滿足下列關係，試求： $\cos a_1-\cos a_4$ 的最大值。

$$\begin{cases} a_1+a_2=a_3\ ,\ a_2+a_3=a_4 \\ \cos a_j=\alpha j^2+\beta j+\gamma\ ,\ j=1\ ,2\ ,3\ ,4 \end{cases}$$

其中 α ， β ， γ 是某些固定常數。