

# 2015 年 ARML 美國地區數學聯賽台灣選拔賽

## 團體賽答案

T-1. 80°

T-6. 1009

T-2. 91

T-7.  $\frac{n-1}{n}$

T-3. 3

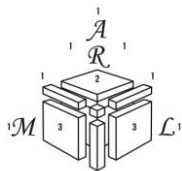
T-8.  $\frac{1}{2}(13 + \sqrt{23})$

T-4. 864

T-9. 2744

T-5.  $\frac{10}{3}$

T-10.  $\frac{28}{9}$



# 2015 年 ARML 美國地區數學聯賽台灣選拔賽

## 思考賽答案

1. 依定義  $D_\alpha[f](x)$

$$= D_{\alpha-\beta}[f](x+\beta) + D_\beta[f](x)$$

2. 已知  $D_\alpha[f](x+k\alpha) = f(x+(k+1)\alpha) - f(x+k\alpha)$ ，故

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} D_\alpha[f](x+k\alpha) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x+(k+1)\alpha) - f(x+k\alpha) \\ &= f(x+n\alpha) - f(x) = D_{n\alpha}[f](x) \end{aligned}$$

3. 已知

$$D_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n-1} D[f](x+k) = n$$

故滿足  $D[f](x) \equiv 1$  之函數均為答案，排除一次多項式之外的

解，則  $f(x) = [x]$  亦為一解。

4. 考慮  $D_\alpha[fg](x) = f(x+\alpha)g(x+\alpha) - f(x)g(x)$

$$= f(x+\alpha)(g(x+\alpha) - g(x)) + (f(x+\alpha) - f(x))g(x)$$

$$= (f(x+\alpha) - f(x))g(x+\alpha) + f(x)(g(x+\alpha) - g(x))$$

$$\text{故 } f(x+\alpha)D_\alpha[g](x) + D_\alpha[f](x)g(x)$$

$$= D_\alpha[f](x)g(x+\alpha) + f(x)D_\alpha[g](x)$$

經過移項即可得到欲證明之等式。或是直接依定義將等式兩邊展開也可得到相同結果。

**5.**  $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$  且  $|a_n| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = 2^n$  。

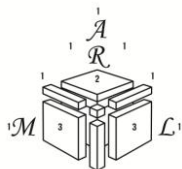
**6.**  $D_\alpha^n[f](x) = n! \alpha^n$  , 且  $D_\alpha^{n+1}[f](x) = 0$  。

**7.**  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$  。

**8.**  $M$  的最小正整數值為 5 。

**9.**  $f(n) = n! + 1$  。

**10.**  $\cos a_1 - \cos a_4$  的最大值為  $3\sqrt{13} - 9$  。



# 2015 年 ARML 美國地區數學聯賽台灣選拔賽

## 個人賽第一輪

### 答案

I-1.  $104^\circ$  I-2. 1008

## 個人賽第二輪

I-3. 35 I-4. 10

## 個人賽第三輪

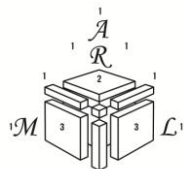
I-5.  $\frac{1}{2}$  I-6. 17

## 個人賽第四輪

I-7.  $\frac{1}{3}$  I-8. 4033

## 個人賽第五輪

I-9. 63 I-10. 129

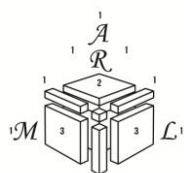


# 2015 年 ARML 美國地區數學聯賽台灣選拔賽

## 接力賽第一輪

### 答案

R1-C. 148



# 2015 年 ARML 美國地區數學聯賽台灣選拔賽

## 接力賽第二輪

### 答案

R2-C. 5