

2015TRML 數學競試個人賽試題

俞克斌老師編寫

第三回

7. 若 $x^3 - 14x^2 + 26x + a = 0$ 的三個根中有一根為另兩根的乘積，則 a 所有可能的和為 _____。

【2015 第十七屆 TRML 個人賽】

答：-173

解：三根為 α 、 β 、 $\alpha\beta$

$$\text{由韋達定理知} \begin{cases} \alpha + \beta + \alpha\beta = 14 \\ \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = 26 \\ \alpha^2\beta^2 = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 14 - \alpha\beta \\ \alpha\beta + \alpha\beta(\alpha + \beta) = 26 \\ \alpha^2\beta^2 = -a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha\beta(14 - \alpha\beta) = 26 \Rightarrow (\alpha\beta)^2 - 15(\alpha\beta) + 26 = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 2 \text{ 或 } 13$$

$$\text{故 } a = -2^2 \text{ 或 } -13^2$$

8. 假設袋中有 15 顆球，其中 4 顆紅球、1 顆白球、10 顆黃球。規定一次只能抽一球且不放回去，現在依甲先乙後的順序分別抽球一次，但當抽到的球是白球時，則須馬上再捕抽一球，問甲有抽中紅球且乙也有抽中紅球的機率為 _____。

【2015 第十七屆 TRML 個人賽】

答： $\frac{6}{91}$

$$\text{解：} \underbrace{\frac{4}{15}}_{\text{甲紅}} \times \underbrace{\frac{3}{14}}_{\text{乙紅}} + \underbrace{\frac{1}{15}}_{\text{甲先白}} \times \underbrace{\frac{4}{14}}_{\text{甲再紅}} \times \underbrace{\frac{3}{13}}_{\text{乙紅}} + \underbrace{\frac{4}{15}}_{\text{甲紅}} \times \underbrace{\frac{1}{14}}_{\text{甲先白}} \times \underbrace{\frac{3}{13}}_{\text{乙再紅}} = \frac{6}{91}$$

9. 設一數列 $\{a_n\}$ 定義如下： $a = 1$ ；對 $n \geq 2$ ， a_n 為 $n - a_k^2$ ($1 \leq k \leq n$) 之中最小的正整數。例如， $a_2 = 2 - 1^2 = 1$ ， $a_3 = 3 - a_1^2 = 3 - a_2^2 = 3 - 1 = 2$ ， a_4 為 $4 - a_1^2 = 3$ 、 $4 - a_2^2 = 3$ 、 $4 - a_3^2 = 0$ 之中最小的正整數，所以 $a_4 = 3$ 。求 $a_{50} + a_{100}$ 為 _____。

【2015 第十七屆 TRML 個人賽】

答：20

第一群： $a_1 = 1$

第二群： $a_2 = 1$ 、 $a_3 = 2$ 、 $a_4 = 3$ 、

第三群： $a_5 = 1$ 、 $a_6 = 2$ 、 $a_7 = 3$ 、 $a_8 = 4$ 、 $a_9 = 5$ 、

解：第四群： $a_{10} = 1$ 、 $a_{11} = 2$ 、 $a_{12} = 3$ 、 $a_{13} = 4$ 、 $a_{14} = 5$ 、 $a_{15} = 6$ 、 $a_{16} = 7$

...

第八群： $a_{50} = 1$ 、...

...

第十群： $a_{82} = 1$ 、 $a_{93} = 2$ 、 $a_{94} = 3$ 、...、 $a_{97} = 16$ 、 $a_{98} = 17$ 、 $a_{99} = 18$ 、 $a_{100} = 19$

所以 $a_{50} + a_{100}$ 為 $1 + 19 = 20$