

國立台南第二高級中學 104 學年度第 2 次代理教師甄選 數學科筆試試題

一、多選題 (占 20 分)

說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯多於 1 個選項者或所有選項均未作答者，該題以零分計算

1. 試問下列敘述何者正確？

(A) 存在角度 θ 滿足 $12\cos^3\theta - 9\cos\theta + 2 = 0$

(B) 存在角度 θ 滿足 $2\sin\theta + 3\cos\theta = 4$

(C) 存在角度 θ 滿足 $2\tan^2\theta - \tan\theta - 2015 = 0$

(D) 存在角度 θ 滿足 $\log_{\frac{1}{3}}(\sin^2\theta - \sin\theta + 1) > 0$

(E) 若三角形三邊長皆為正整數，則此三角形的外接圓半徑必為有理數

2. 已知 $f(x)$ 為多項式函數。若函數 $f'(x)$ 的圖形為通過 $A(1,0)$ 與 $B(2,0)$ 兩點且開口向下的拋物線，試問下列哪些選項是正確的？

(A) $f(x)$ 在 $1 < x < 2$ 的範圍內為遞增函數

(B) 若 L 為以 $(3, f(3))$ 為切點的切線，則 L 的斜率為正

(C) 方程式 $f(x) = 0$ 有三個實根

(D) $f(x)$ 在 $x = 1$ 處有極大值

(E) $f(x)$ 在區間 $(2, \infty)$ 的圖形是凹口向下

3. 已知 $f(x)$ 是三次實係數多項式，且 $f(11) = 2012$ ， $f(21) = -2013$ ， $f(31) = 2014$ ，設

$$g(x) = \frac{(x-21)(x-31)}{(11-21)(11-31)} \cdot 2012 + \frac{(x-11)(x-31)}{(21-11)(21-31)} \cdot (-2013) + \frac{(x-11)(x-21)}{(31-11)(31-21)} \cdot 2014$$
 且 $r(x)$ 為 $f(x)$

除以 $(x-11)(x-21)(x-31)$ 之餘式，試問下列哪些選項是正確的？

(A) $r(11) = 2012$

(B) $g(41) = -2015$

(C) 方程式 $f(x) = 0$ 恰有 3 個相異實根

(D) 方程式 $f(x) - g(x) = 0$ 恰有 3 個相異實根

(E) 方程式 $r(x) = 0$ 恰有 2 個相異實根

4. 若 $a=2^{101}+3^{101}+5^{101}$ ，則下列敘述何者為真？（ $\log 2=0.3010$ ， $\log 3=0.4771$ ， $\log 7=0.8451$ ）
- (A) a 的個位數字為 0
 - (B) a 必為 3 的倍數
 - (C) a 除以 9 的餘數為 7
 - (D) a 為 73 位數
 - (E) a 的最高位數字為 8

二、填充題：(每格 6 分，共 60 分)

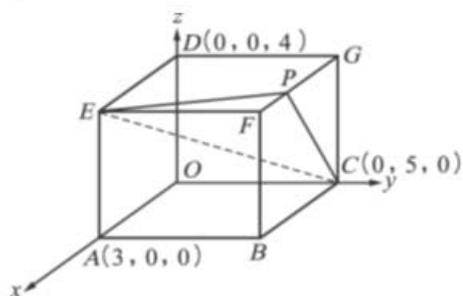
1. 已知兩曲線 $y=x^3$ 與 $y=-3x^2+a$ 有三個相異交點，求實數 a 的範圍？_____
2. 擲一公正的骰子兩次，若 a 、 b 分別表示第一次及第二次出現的點數，則直線 $x-y+1=0$ 與圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=2$ 有交點的機率為_____。
3. 求 $xyz u=18000$ 的正整數解有多少組？_____
4. 設三直線 $L_1:2x+y+1=0$ ， $L_2:x+2y-1=0$ ， $L_3:2x-y-7=0$ 圍成三角形 $\triangle ABC$ ，則 $\triangle ABC$ 的內心坐標為_____。
5. 求無窮級數 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i}{n} \right)^3 \right]$ 的值？_____
6. 設實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1-2i)=7$ 與 $f(i)=27$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，若 $f(x)$ 除以 $(x^2-2x+5)(x^2+1)$ 的餘式為 ax^3+bx^2+cx+d ，則實數序對 $(a, b, c, d)=$ _____。

(背面尚有試題)

7. 設四面體 $OABC$ 中， \overrightarrow{OA} ， \overrightarrow{OB} ， \overrightarrow{OC} 兩兩垂直，若 $\overline{OA} = 4$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積？

8. 設 P 為雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 之動點，且點 P 的 x 坐標大於 0，另有定點 $A(7, 4)$ 及 $F(5, 0)$ ，則 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 的最小值為_____。

9. 如圖所示， $OABC-DEFG$ 是一長方體，其中一些頂點坐標為 $A(3, 0, 0)$ ， $C(0, 5, 0)$ ， $D(0, 0, 4)$ 。設 P 是線段 FG 上一點，欲使 $\triangle CEP$ 的周長最小，則點 P 的坐標為_____。



10. 設甲袋中有 2 顆白球，乙袋中有 3 顆白球及 5 顆黑球，若每次由兩袋中隨機各取出一球，互相交換後放回袋中，則經過二次交換後，甲袋中有 2 顆白球的機率為_____。

三、計算題：(占 20 分) 【說明：每題 10 分，請寫出計算過程，否則不計分】

1. 已知 $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^{20}$ 展開後有 21 項：

(1) 試求共有多少項為無理數？

(2) 若從展開後的這 21 項中任取 3 項，令隨機變數 X 表示取出的 3 項中為有理數的項數，試求 X 的期望值？

2. 若兩容器甲、乙分別裝有濃度為 25% 與 10% 的糖水各 1 公升(兩容器皆半滿)，今從甲容器倒出 $\frac{1}{4}$ 的糖水到乙容器搖勻後，再從乙容器倒出 $\frac{1}{4}$ 的糖水回到甲容器，如此繼續重複操作下去。試問：至少需操作幾次後，甲、乙兩容器中的糖水濃度差小於 0.001%？($\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$)

國立台南第二高級中學 104 學年度第 2 次代理教師甄選

數學科筆試試題答案卷

一、多選題 (占 20 分)

說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯多於 1 個選項者或所有選項均未作答者，該題以零分計算

1.	2.	3.	4.
(A)(C)(D)	(A)(E)	(A)(C)(D)(E)	(A)(C)

二、填充題：(占 60 分)

1.	2.	3.	4.	5.
$0 < a < 4$	$\frac{23}{36}$	7000	$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$	$\frac{15}{4}$
6.	7.	8.	9.	10.
$(2, 0, 2, 27)$	$8\sqrt{3}$	$4\sqrt{10} - 6$	$(\frac{4}{3}, 5, 4)$	$\frac{19}{64}$

三、計算題：(占 20 分)

1. 答案：略

2. 答案：略