國立鳳山高中 104 學年度第二次代理教師甄試數學科試題與解答

作答說明：

1.填充題部分，請在答案卷上自行標明題號並填入答案，不必列計算過程。

2.計算證明題部分，請將過程詳列於答案卷上，並標明題號，否則不計分。

壹、填充題：每格 7 分，共 56 分。

A. 若 $\log_2 x+\log_2 y=2$，則 $(x-1)^2+(y-1)^2$ 的最小值為____.

解：由 $\log_2 x+\log_2 y=2$ 得 $xy=4 \Rightarrow y=\dfrac{4}{x}$，代入所求得

$$(x-1)^2+(y-1)^2=x^2-2x+1+\frac{16}{x^2}-\frac{8}{x}+1=x^2+(\frac{4}{x})^2-2(x+\frac{4}{x})+2=(x+\frac{4}{x})^2-2(x+\frac{4}{x})-6,$$

令 $x+\dfrac{4}{x}=t$，則由算幾不等式得 $t\geq 4$ 且所求 $=t^2-2t-6=(t-1)^2-7$，

當 $t=4$ 時有最小值 2 ■

B. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴關係：$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=3a_n+8,\ n\geq 1 \end{cases}$，則一般項 $a_n=$____.

解：先將 $a_{n+1}=3a_n+8$ 轉成等比 $(a_{n+1}+\alpha)=3(a_n+\alpha)$ 的形式，比較係數得 $\alpha=4$，

若令 $b_n=a_n+\alpha$，則 $a_{n+1}+\alpha=b_{n+1}$， 即 $b_{n+1}=3b_n$，$\langle b_n\rangle$ 為一個首項 $b_1=a_1+4=5$，

公比 $r=3$ 的等比數列，因此 $b_n=b_1\cdot r^{n-1}=5\cdot 3^{n-1}$.

再由 $b_n=a_n+\alpha$ 得 $a_n=b_n-\alpha=3\cdot 5^{n-1}-4$ ■

C. 已知 $\log x$ 的首數為 1，且 $\log x^n$ 的尾數與 $\log\dfrac{1}{x^n}$ 的尾數相等，其中 n 為自然數，

則滿足此等性質的所有 x 的和為_____.

解：因為 $\log x$ 的首數為 1，故 $1\leq\log x<2$，又 $\log x^n$ 的尾數與 $\log\dfrac{1}{x^n}$ 的尾數相等，

故 $2n\log x=k$ 為整數 $\Rightarrow$ $1\leq\log x=\dfrac{k}{2n}<2 \Rightarrow$ $\log x=1$，$1+\dfrac{1}{2n}$，$1+\dfrac{2}{2n}$，...，$1+\dfrac{2n-1}{2n}$ ，

$\Rightarrow$ $x=10$，$10^{1+\frac{1}{2n}}$，$10^{1+\frac{2}{2n}}$，...，$10^{1+\frac{2n-1}{2n}}$， 總和為 $10\times\dfrac{1-(10^{\frac{1}{2n}})^{2n}}{1-10^{\frac{1}{2n}}}=\dfrac{90}{10^{\frac{1}{2n}}-1}$ ■

D. 設 k 為實數且方程式 $x^2+(k+5)x+k^2+7=0$ 有兩實根 α,β，則 $\alpha^2+\beta^2$ 的最大值為____.

解：因有兩實根，故 $D=(k+5)^2-4(k^2+7)\geq 0 \Rightarrow -3k^2+10k-3\geq 0 \Rightarrow 3k^2-10k+3\leq 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{3}\leq k\leq 3$

由根與係數的關係得 $\alpha+\beta=-(k+5)$，$\alpha\beta=k^2+7$

所求 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=k^2+10k+25-2k^2-14=-k^2+10k+11=-(k-5)^2+36$，

當 $k=3$ 時，有最大值 $=32$ ■

E. 用 1, 2, 3, 4 等數字寫成六位數的正整數，其數字中沒有兩個 1 相鄰在一起的數有_____個.

解：若只有一位數□，則有 4 個.

若是兩位數□□，則有 3(數字相同) $+3\times 4$ (數字不同) $=15=a_2$.

若是三位數□□□，則有 3×4(最左邊數字 1) $+3\times a_2$(最左邊數字不是 1) $=57=a_3$.

因此得遞迴關係 $a_{n+2}=3a_n+3a_{n+1}$. $a_4=3\times 15+3\times 57=216$，$a_5=3\times 57+3\times 216=819$

$a_6=3\times 216+3\times 819=3105$ ■

F. 若多項式 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^k$ 除以 $x-1$ 的商式為 $Q(x)$，則 $Q(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為____.

解：由題意：$f(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^k=(x-1)Q(x)+r \Rightarrow r=f(1)=1+2+3+\cdots+n$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (x-1)Q(x)&=f(x)-r=(x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n)-(1+2+3+\cdots+n)\\&=(x-1)+(2x^2-2)+(3x^3-3)+\cdots+(nx^n-n)\\&=(x-1)+2(x-1)(x+1)+3(x-1)(x^2+x+1)+\cdots+n(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\end{aligned}$$

$\Rightarrow Q(x)=1+2(x+1)+3(x^2+x+1)+\cdots+n(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

$\Rightarrow Q(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式 $=Q(1)=1+2\times 2+3\times 3+\cdots+n\times n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ■

G. 設圓 $C: x^2+y^2=25$，且 $A(3,0), B(0,4)$ 為圓內兩點，P 為圓 C 上任一點，若 ΔPAB 面積的最大值為 α，此時 P 點坐標為 (β,γ)，則三元序對 $(\alpha,\beta,\gamma)=$____.

解：設 $P(x,y)$，則 $x^2+y^2=25$，且 $\overrightarrow{PA}=(3-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-x,4-y)$，

ΔPAB 面積 $\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}3-x & -y\\ -x & 4-y\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}|(3-x)(4-y)-(-x)(-y)|=\dfrac{1}{2}|12-(4x+3y)|$

由柯西不等式：$(x^2+y^2)(4^2+3^2)\geq(4x+3y)^2 \Rightarrow -25\leq 4x+3y\leq 25$，

故 ΔPAB 面積的最大值為 $\dfrac{37}{2}$，此時 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=t \Rightarrow x=4t$，$y=3t$

代入 $4x+3y=-25$ 得 $t=-1$， $P(-4,-3)$， $(\alpha,\beta,\gamma)=(\dfrac{37}{2},-4,-3)$ ■

H. 設 $a\in R$，若聯立方程式 $\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=2 \end{cases}$ 有實根，則 a 的範圍為____.

解：由 $x^3+y^3=2 \Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)=2 \Rightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=2 \Rightarrow a(a^2-3xy)=2$

$\Rightarrow a^3-3axy=2 \Rightarrow xy=\dfrac{a^3-2}{3a}$，

由根與係數的關係：x, y 為方程式 $t^2-at+\dfrac{a^3-2}{3a}=0$ 的兩實根 $\Rightarrow D=a^2-4\cdot\dfrac{a^3-2}{3a}\ge 0$

$\Rightarrow \dfrac{3a^3-4a^3+8}{3a}\ge 0 \Rightarrow 3a(-a^3+8)\ge 0 \Rightarrow a(a-2)(a^2-2a+4)\le 0 \Rightarrow 0<a\le 2$ ■

貳、計算證明題：共 44 分。

1.請敘述：對數換底公式(4 分)，並證明之(6 分).

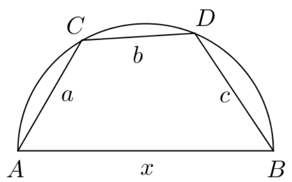
敘述：設 $0<a\ne 1$，$0<c\ne 1$， $b>0$，則 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ （4 分）

證明：設 $\log_c a=p$，$\log_c b=q$，則 $a=c^p$，$b=c^q$.

得 $b=c^q=(c^p)^{\frac{q}{p}}=a^{\frac{q}{p}} \Rightarrow \log_a b=\log_a a^{\frac{q}{p}}=\dfrac{q}{p}$，即 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ 得證 ■(6 分)

2.如右下圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓，圓弧上有異於 A, B 的兩相異點 C, D.

若 $\overline{AC}=a$，$\overline{CD}=b$，$\overline{DB}=c$，$\overline{AB}=x$，試證 ：$x^3-(a^2+b^2+c^2)x=2abc$. (10 分)

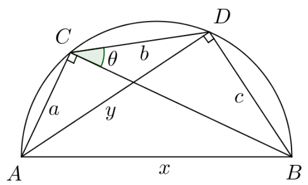


解：設 $\overline{AD}=y$，$\angle BCD=\theta$，

則由餘弦及正弦定理 ：$y^2=x^2-c^2=a^2+b^2-2ab\cos(90^\circ+\theta)$

$\Rightarrow x^2-(a^2+b^2+c^2)=2ab\sin\theta=2ab\cdot\dfrac{c}{x}$

$\Rightarrow x^3-(a^2+b^2+c^2)x=2abc$ ■ (10 分)



3.設 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 為空間中不共平面的三個非零向量，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，試證：$P, A, B, C$ 四點共平面的充要條件為 $x+y+z=1$. (10 分)

證明：$(\Rightarrow)$：若 P, A, B, C 共平面，則存在實數 t, k 使 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=(1-t-k)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$,

因 $\overrightarrow{OP}$ 表為 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 的線性組合係數是唯一的，

故 $x=1-t-k$， $y=t$， $z=k$，即 $x+y+z=1$（5 分）

$(\Leftarrow)$：若 $x+y+z=1$，則由

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}+y(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+z(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{OA}$

$=(x+y+z-1)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}$

即 $\overrightarrow{AP}$ 可表為 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的線性組合，故 P, A, B, C 共平面（5 分）■

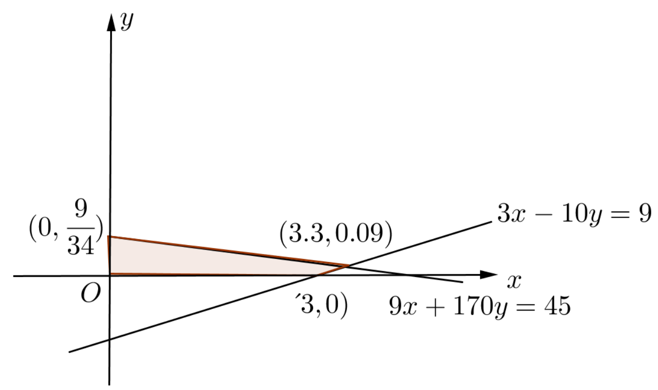
4.某工廠的一個車間生產某種產品，其成本為每公斤 27 元，售價為每公斤 50 元. 在生產產品的同時，每公斤產品產生 0.3 立方米的污水，污水有兩種排放方式：其一是輸送到污水處理廠，經處理(假設污水處理率為 85 %)後排入河流；其二是直接排入河流. 若污水處理廠每小時最大處理能力是 0.9 立方米污水，處理成本是每立方米污水 5 元；環保部門對排入河流的污水收費標準是每立方米污水 17.6 元，根據環保要求，該車間每小時最多允許排入河流中的污水是 0.225 立方米. 請問 ：該車間應選擇怎樣的生產與排污方案，使其淨收益最大?

(設變數、列限制條件 4 分，列出目標函數 3 分，作出可行解區域的圖形 3 分，求出最佳解及最大值 4 分，共 14 分)

解：設每小時生產產品 x 公斤，汙水直接排入河流 y 立方米，則限制條件為

$$\begin{cases} x\ge 0,\ \ y\ge 0 \\ 0.3x-y\le 0.9 \\ (0.3x-y)\times\dfrac{15}{100}+y\le 0.225 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 0,\ \ y\ge 0 \\ 3x-10y\le 9 \\ 9x+170y\le 45 \end{cases}$$ ，(4 分)圖形如右：(3 分)



目標函數為 $(50-27)x-5(0.3x-y)-17.6\left[y+0.15(0.3x-y)\right]=20.708x-9.96y$，(3 分)

目標函數斜率為 $\dfrac{20.708}{9.96}>2$，由平移法知：當 $(x, y)=(3.3, 0.09)$ 時，有最大值 67.44，即每小時生產產品 3.3 公斤， 0.09 立方米汙水直接排入河流，淨收益最大 67.44 元 ■

(4 分)

國立鳳山高中 104 學年度第二次代理教師甄試數學科試題填充題簡答

壹、填充題：每格 7 分，共 56 分。

題號	*A*	*B*	*C*	*D*
答案	**2**	$5\cdot 3^{n-1}-4$	$\dfrac{90}{10^{\frac{1}{2n}}-1}$	**32**
題號	*E*	*F*	*G*	*H*
答案	**3105**	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$(\dfrac{37}{2},-4,-3)$	$0<a\leq 2$