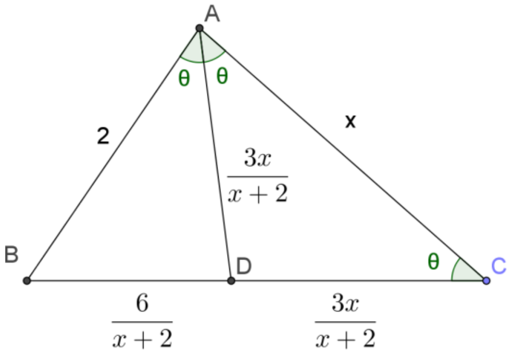
<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>

已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，且 $\angle A=2\angle C$，試求 $\overline{AC}$ 之值為？

【解答】$\dfrac{5}{2}$

【詳解】

設 $\overline{AC}=x$，做 $\angle A$ 平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則可利用角平分線性質，$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=2:x$，假設 $\overline{BD}=\dfrac{6}{x+2}$，

$\overline{CD}=\overline{AD}=\dfrac{3x}{x+2}$。

利用餘弦定理，解 $\cos\angle ABC=\dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{2^2+(\frac{6}{x+2})^2-(\frac{3x}{x+2})^2}{2\cdot 2\cdot \frac{6}{x+2}}$，展開可得

$-2x^3+x^2+10x=0$，$x=\dfrac{5}{2}$ ($x=-2,0$ 不合)。

</td>
<td>104
松
山
家
商</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
1
8
0</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>

已知 $\log_4 m=\log_6 n=\log_9(m+n)$，求 $\dfrac{n}{m}=$？

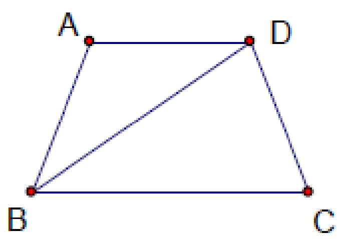
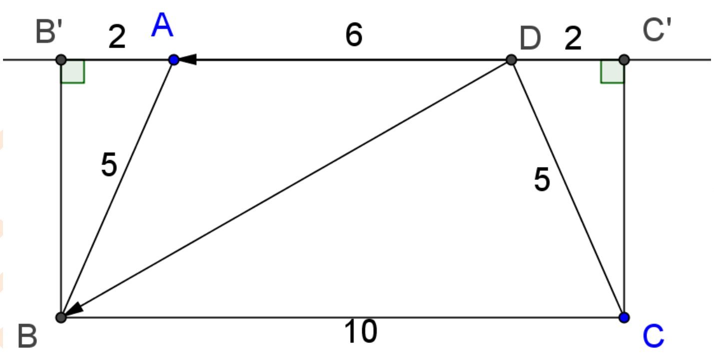
【解答】$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【詳解】令 $\log_4 m=\log_6 n=\log_9(m+n)=t$，則 $m=4^t$，$n=6^t$，

$m+n=9^t=(\dfrac{36}{4})^t=\dfrac{6^{2t}}{4^t}=\dfrac{n^2}{m}\Rightarrow n^2=nm+m^2$，同除以 m^2 可得 $(\dfrac{n}{m})^2-(\dfrac{n}{m})+1=0$，因此 $(\dfrac{n}{m})=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

因為 $(\dfrac{n}{m})=(\dfrac{6}{4})^t>0$，所以取 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

</td>
<td>104
松
山
家
商</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
1
8
1</td>
</tr>
</table>

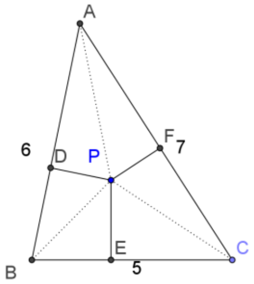
1	若不等式 $(x+2)(x-1)(x^2-mx+m)>0$ 的解為 $x>1$ 或 $x<-2$，則 m 值的範圍為？ 【解答】$0\le m<4$ 【詳解】顯然 $(x^2-mx+m)>0$，判別式 $m^2-4m<0$，得 $0<m<4$。 考慮判別式等號成立時，可能出現額外的 m 值。 若 $m=0$，則 $x^2-mx+m=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0, x^2=0 \\ x\ne 0, x^2>0 \end{cases}$，所得解的範圍為 $x>1$ 或 $x<-2$，且 $x\ne 0$，符合題目要求。 若 $m=4$，則 $x^2-mx+m=(x-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x=2, (x-2)^2=0 \\ x\ne 2, (x-2)^2>0 \end{cases}$，所得解的範圍為 $x>1$ 或 $x<-2$，且 $x\ne 2$，不合題目要求。 因此 m 之範圍為 $0\le m<4$。	104 松山家商				A0182
1	如右圖，ABCD 為一梯形，$\overline{AB}=\overline{CD}=5$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AD}=6$，則 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=$  ？ 【解答】48 【詳解】 由題意可知 $ABCD$ 為一等腰梯形，因此過 B 點做直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上的垂足 B'，如圖，可知 $\overline{AB'}=2$。 所求 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB'}=6\cdot 8=48$	104 松山家商				A0183

1

已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=6$ ，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=7$，P 為其三邊上或內部的任一點，D、E 及 F 分別在 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 三邊上且 $\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{BC}$ 及 $\overline{PF}\perp\overline{CA}$；求 $\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}$ 的最小值為？

【解答】$\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$

【詳解】



令 ΔABC 中，$\overline{AB}$ 邊上的高為 h_{AB} ，其他一同。

由於 P 點在三邊或內部，可知面積 $\Delta ABC=\Delta PAB+\Delta PBC+\Delta PCA$，

因此 $\overline{AB}\times\overline{PD}+\overline{BC}\times\overline{PE}+\overline{CA}\times\overline{PF}=\overline{AB}\times h_{AB}=\overline{BC}\times h_{BC}=\overline{CA}\times h_{CA}$。

由於 $\overline{CA}$ 為三邊中最長的邊，因此有 $\overline{CA}\geq\overline{AB},\overline{CA}\geq\overline{BC}$ ，

$\overline{AB}\times\overline{PD}+\overline{BC}\times\overline{PE}+\overline{CA}\times\overline{PF}\leq\overline{CA}\times\overline{PD}+\overline{CA}\times\overline{PE}+\overline{CA}\times\overline{PF}=\overline{CA}(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})$。

可知 $\overline{CA}\times h_{CA}\leq\overline{CA}(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})$ ，同除以 $\overline{CA}$ 可得 $\overline{CA}\leq\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}$ 。

等號成立時，可能有兩種狀況，一為 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$，第二種為 P 點使得 $\overline{PD}=\overline{PE}=0$。

此題三邊邊長不相等，因此為第二種狀況，此時 P 點與 B 點重合，此最小值為最大邊上的高。

利用海龍公式可求 ΔABC 面積為 $6\sqrt{6}$ ，因此 $h_{CA}=\dfrac{2\times6\sqrt{6}}{7}=\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$ 。

104 松山家商

A0184

1

若方程式 $x^2-px-q=0$ 的正根小於 3，其中 p,q 為正整數，則滿足上述條件的數對 (p,q) 共有幾組解？

【解答】7

【詳解】令兩根為 α,β ，正根 $0<\alpha<3$，則由根與係數可知 $\alpha+\beta=p>0$ ，

$\alpha\beta=-q<0$ ，可推得 $\beta<0$ ，且 $|\alpha|>|\beta|$ 。

因此 $p=\alpha+\beta=\alpha-|\beta|>0$，可知 $0<p<\alpha$ ，可能的正整數 p 值只有 1、2。

若 $p=1$，找尋 $x^2-x-q=0$ 正根為 3，可知此時 $q=6$；因此 $p=1$ 時， $q=1,2,3,4,5$ 。

若 $p=2$ ，找尋 $x^2-2x-q=0$ 正根為 3，可知此時 $q=3$；因此 $p=2$ 時， $q=1,2$ 。

所以共有 7 組解。

104 松山家商

A0185

1	袋中有 6 紅球，5 白球，4 黑球共 15 球大小相同，今從袋中每次取一球不放回，求黑球最先取完之機率值為？ 【解答】$\dfrac{19}{45}$ 【詳解】令 A 事件為黑球比紅球先取完的事件，B 事件為黑球比白球先取完的事件，$A\cap B$ 即為所求的黑球最先取完，$A\cup B$ 則是代表黑球不是最後取完的事件。 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{6}{4+6}+\dfrac{5}{4+5}-\dfrac{5+6}{4+5+6}=\dfrac{19}{45}$	104 松山家商			A0186
1	甲乙兩人依”甲乙甲乙…”的順序輪流擲一公正硬幣，規定擲出正面者得 1 分，反面得 0 分。若擲完第三次時(甲乙總共投擲三次)，甲得分領先乙的條件下，則擲完第六次時，甲得分領先乙的機率為________。(過程中不一定維持領先)？ 【解答】$\dfrac{19}{32}$ 【詳解】擲完第三次時甲領先乙的情況，可能為領先一分或兩分，若甲領先 1 分，擲出的順序可為(正正正)、(正反反)、(反反正)，領先 2 分的狀況只有(正反正)一種，機率分別為 $\dfrac{3}{8}$、$\dfrac{1}{8}$。 若前三次甲領先 1 分，擲完六次甲仍領先，代表乙後三次得分小於或等於甲，後三次情況可能為(反正反)、(正正反)、(反正正)、(反反反)，機率 $\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$。 若前三次甲領先 2 分，擲完六次甲仍領先，代表乙沒有翻盤成功，而乙唯一翻盤的可能為(正反正)，能跟甲追成平手的機率為 $\dfrac{1}{8}$。所以乙沒有翻盤成功機率為 $1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$。 所求條件機率為 $\dfrac{\frac{3}{8}(\frac{1}{2})+\frac{1}{8}(\frac{7}{8})}{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}=\dfrac{19}{32}$	104 松山家商			A0187