數學試題

Part I: 高中數學 40% (每題五分)

1. 坐標空間中，點 $P(4,-4,5)$ 到 A(2, 0, 3), B(4,3,7) 兩點連線的距離是 ______.

2. 解對數方程式

$$\log_{\sqrt{3}}(3-x)+\log_3(x+1)=2$$

得 $x=$ ______ 或 ______.

3. 多項式 x^{100} 除以 $(x-1)^3$ 的餘式為 ______.

4. 空間中，點 $P(2,-1,3)$ 到直線 $L:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{5}$ 垂線之垂足坐標為 ______.

5. 坐標平面上，$P(7,3)$ 到圓 $C: x^2+y^2-4x-6y+8=0$ 的切線段長為 ______.

6. 給定空間中兩兩互相垂直的向量

$$\vec{u}=(1,-2,3),\quad \vec{v}=(3,0,-1),\quad \vec{w}=(2,10,6),$$

求 x,y,z 值使 $\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$.

7. 設 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$, 則

$$(2-3\omega)(2-3\omega^2)(2-3\omega^3)(2-3\omega^4)= \_\_\_\_\_\_.$$

8. 在 $0\le x\le 2\pi$ 的範圍內，$f(x)=2\sin x-\cos^2 x$ 的最大值是 ______, 發生在 $x=$ ______.

Part II: 大學微積分 40% (每題八分)

9. 通過點 $P(2,4)$ 且與曲線 $x^3+y^3-9xy=0$ 相切的直線方程式為 $y=$ ______.

10. 積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ 的值為 ______.

11. 求 $\ln(1+x^2)$ 在 $x=0$ 的泰勒展開式 ______.
$\left(\text{提示: } \ln(1+x)=\int_0^x \dfrac{dt}{1+t}\right)$

12. 坐標平面上，心臟線 $r=1-\cos\theta$ 所包圍面積是 ______.

13. 函數 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z^2$ 在點 $P(2,1,3)$ 且在 $\vec{v}=(2,1,-2)$ 方向的方向導數是_______.

Part III: 專業知識

(從四題中選做兩題, 每題十分, 需列出完整的過程)

14. 設 p 是質數, n 是正整數且可表式為 p 進位數

$$n=(a_0+a_1p+\cdots+a_kp^k),\quad 0\le a_j<p,\quad a_k\ne 0.$$

使 p^m 能整除 $n!$ 的非負整數 m 以 $\nu_p(n!)$. 證明

$$\nu_p(n!)=\frac{n-(a_0+a_1+\cdots+a_k)}{p-1}$$

$\left(\text{提示：}\nu_p(n!)=\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^r}\right],\quad \text{其中 } [x] \text{ 是高斯整函數}\right)$

15. 設 $R=\mathbb{Q}[x]$ 是係數為有理數的多項式環, M 是由 x^2+1 所生成的理想, 在商環 R/M 中計算下列各式

(a) 把 $(ax+b+M)(cx+d+M)$ 表示為 $px+q+M$ 的形式, 其中 a,b,c,d,p,q 都是有理數.

(b) 當 $a^2+b^2\ne 0$ 時, 計算 $ax+b$ 的乘法反元素.

16. 階乘函數的定義是

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\quad x>0$$

(1)計算 $\Gamma(1)$.

(2)計算 $\Gamma(\frac{1}{2})$.

(3)證明 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\quad x>0.$

(4)對正整數 n, 求 $\Gamma(n+1)$ 的值.

17. 設 $f(z)$ 是一複數 $z=x+iy$ 的解析函數且

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

證明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{dy}\ \text{且}\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{dx}.$$