

一、計算

- L_1 、 L_2 為空間中兩歪斜線，點 A 、 B 、 C 在 L_1 上，滿足 $\overline{AB}:\overline{BC} = 2:1$ ，

且 $d(A, L_2) = \sqrt{33}$ 、 $d(B, L_2) = 3$ 、 $d(C, L_2) = 2\sqrt{6}$ 。求 $d(L_1, L_2)$ 。
- $xy + yz = 10$ ，求 $x^2 + 5y^2 + 4z^2$ 的最小值。
- 橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1$ ， F_1 、 F_2 為焦點， \overline{AB} 是過 F_1 的焦弦，且 $a\Delta AF_2B = 32$ ，求 \overline{AB} 。
- 20 個格子排成一排，每一格著黑色或白色，同色不相鄰，且黑色不連續使用，求著色方法數。
- 擲骰子，若得質數點則得該點數獎金，其他點數沒有獎金。求擲三次骰子所得獎金的期望值與變異數。
- 求 $f(x) = x + 3 + \sqrt{4 - x^2}$ 的值域。
- 正二十面體兩個相鄰面的兩面角餘弦值。
- $f(x) = x^2 + 6x + c$ ， $f(f(x))$ 恰有三相異實根，求 c 。
- 凸四邊形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ， $a\Delta ACD = n$ ， $a\Delta ACB = m$ ，求 $n^2 + m^2$ 最大值。

10. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$ 的值。

11. 求雙曲線 $3x - 2y + xy - 10 = 0$ 的焦點坐標。

12. 存在唯一的正方形邊長包含四點 $A(0,12), B(10,9), C(8,0), D(-4,7)$ ，求正方形面積。

13. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2015}\} \subset \mathbb{N}$ ，集合中任何一個元素都不是其他任兩個元素之和， M 是集合中最大的元素，求 M 的最小值。

14. 圓 O 完全落在 $y \geq x^4$ 的區域中，求圓的最大半徑。

15. 點 P 在 $\triangle ABC$ 內， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ， $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{0}$ ，求 $\overline{PA} : \overline{PB} : \overline{PC}$ 。

二、證明

1. $a_1 = \sqrt{6}, a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$ ，證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在並求其值。