

# 104 年大學入學學力測驗數學試題暨詳解

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 50 分）

一、單選題（占 20 分）

1. 每週同一時間點記錄某植物的成長高度，連續五週的數據為

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 15, a_5 = 31。$$

請問此成長高度數列滿足下列選項中哪一個式子？

(1)  $a_{t+1} = 3a_t - 1, t=1, 2, 3, 4$

(2)  $a_t = t!, t=1, 2, 3, 4, 5$

(3)  $a_{t+1} = a_t + t^2, t=1, 2, 3, 4$

(4)  $a_t = 2^t - 1, t=1, 2, 3, 4, 5$

(5)  $a_{t+1} = ta_t + 1, t=1, 2, 3, 4。$

【104 學測】

答：(3) **(第一冊第二三章—綜合)**

解：(1)  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$  (不合)

(2)  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 24$  (不合)

(4)  $a_1 = 1, a_2 = 3$  (不合)

(5)  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$  (不合)

2. 第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

(1) 10,000 元

(2) 1,000,000 元

(3) 100,000,000 元

(4) 1,000,000,000 元

(5) 1,000,000,000,000 元。

【104 學測】

答：(4) **(第一冊第三章—對數—首數尾數)**

解： $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{29} = \frac{1[1 - 2^{30}]}{1 - 2} = 2^{30} - 1$

$\log 2^{30} \doteq 30 \times 0.3010 = 9.03$ ，表十位數

3. 有兩組供機器運作的配件 A、B，其單獨發生故障的機率分別為 0.1、0.15。

只有當 A、B 都發生故障時，此機器才無法運作。

A、B 兩配件若用串接方式，前面故障會導致後面故障，

但若後面故障則不會影響前面的故障情形；若用並列方式，則故障情形互不影響。

若考慮以下三種情形：

(一)將 B 串接於 A 之後；(二)將 A 串接於 B 之後；(三)將 A、B 獨立並列

在情況(一)、(二)、(三)之下，機器無法運作的機率分別為  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ 。

請選出正確的選項：

(1)  $p_1 > p_2 > p_3$

(2)  $p_2 > p_1 > p_3$

(3)  $p_3 > p_2 > p_1$

(4)  $p_3 > p_1 > p_2$

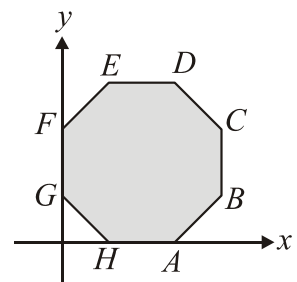
(5)  $p_1 = p_2 > p_3$ 。

【104 學測】

答：(2) **(第二冊第三章—機率—獨立事件)**

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = 0.1 \times 1 \\ \text{解: } P_2 = 0.15 \times 1 \\ P_3 = 0.1 \times 0.15 = 0.015 \end{array} \right\} \text{故 } P_2 > P_1 > P_3$$

4. 一線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上的正八邊形  $ABCDEFGH$  及其內部，如圖。已知目標函數  $ax+by+3$  (其中  $a、b$  為實數) 的最大值只發生在  $B$  點。請問當目標函數改為  $3-bx-ay$  時，最大值會發生在下列哪一點？



- (1)  $A$                       (2)  $B$                       (3)  $C$   
(4)  $D$                       (5)  $E$ 。

【104 學測】

答：(1) (**第三冊第二章—線性規劃**)

解：因為  $ax+by+3$  只在  $B$  點發生最大值，故斜率為  $-\frac{a}{b} > 0$

而  $3-bx-ay$  斜率  $-\frac{b}{a} > 0$ ，且與  $ax+by+3$  關於  $AB$  中垂線成對稱，故在  $A$  點有最大值

析：應考中，不妨令  $ax+by+3$  為  $2x-y+3$  只在  $B$  點發生最大值，則  $3-bx-ay$  則為  $x-2y+3$  顯然在  $A$  點有最大值

## 二、多選題 (占 30 分)

5. 小明參加某次路跑 10 公里組的比賽，下表為小明手錶所記錄之各公里的完成時間、平均心率及步數：

	完成時間	平均心率	步數
第一公里	5:00	161	990
第二公里	4:50	162	1000
第三公里	4:50	165	1005
第四公里	4:55	162	995
第五公里	4:40	171	1015
第六公里	4:41	170	1005
第七公里	4:35	173	1050
第八公里	4:35	181	1050
第九公里	4:40	171	1050
第十公里	4:34	188	1100

在這 10 公里的比賽過程，請依據上述數據，選出正確的選項：

- (1) 由每公里的平均心率得知小明最高心率為 188  
(2) 小明此次路跑，每步距離的平均小於 1 公尺  
(3) 每公里完成時間和每公里平均心率的相關係數為正相關  
(4) 每公里步數和每公里平均心率的相關係數為正相關  
(5) 每公里完成時間和每公里步數的相關係數為負相關。

【104 學測】

答：(2)(4)(5) (**第二冊第四章—數據分析—相關**)

解：(1) 無法得知「瞬時最高心律」  
(3) 應為負相關

6. 設  $f(x)$  是首項係數為 1 的實係數二次多項式。請選出正確的選項：

- (1) 若  $f(2)=0$ ，則  $x-2$  可整除  $f(x)$       (2) 若  $f(2)=0$ ，則  $f(x)$  為整係數多項式  
 (3) 若  $f(\sqrt{2})=0$ ，則  $f(-\sqrt{2})=0$       (4) 若  $f(2i)=0$ ，則  $f(-2i)=0$   
 (5) 若  $f(2i)=0$ ，則  $f(x)$  為整係數多項式。      【104 學測】

**答**：(1)(4)(5) (**第一冊第三章—多項函數—餘式定理、因式定理、成雙定理**)

**解**：(2) 無法確定

(3) 必須有理係數才成立

7. 坐標平面上，在函數圖形  $y=2^x$  上，標示  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個點，其  $x$  坐標分別為  $-1$ 、 $0$ 、 $1$ 、 $2$ 。請選出正確的選項：

- (1) 點  $B$  落在直線  $AC$  下方  
 (2) 在直線  $AB$ 、直線  $BC$ 、直線  $CD$  中，以直線  $CD$  的斜率最大  
 (3)  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個點，以點  $B$  最靠近  $x$  軸  
 (4) 直線  $y=2x$  與  $y=2^x$  的圖形有兩個交點  
 (5) 點  $A$  與點  $C$  對稱於  $y$  軸。      【104 學測】

**答**：(1)(2)(4) (**第一冊第三章—指數函數**)

**解**：(3) 應為  $A$  點最接近  $x$  軸

(5) 顯然不正確

8. 坐標平面上有一雙曲線，其漸近線為  $x-y=0$  和  $x+y=0$ 。

關於此雙曲線的性質，請選出正確的選項：

- (1) 此雙曲線的方程式為  $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1$  或  $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = -1$ ，其中  $r$  為非零實數  
 (2) 此雙曲線的貫軸長等於共軛軸長  
 (3) 若點  $(a, b)$  為此雙曲線在第一象限上一點，則當  $a > 1000$  時， $|a-b| < 1$   
 (4) 若點  $(a, b)$ 、 $(a', b')$  為此雙曲線在第一象限上兩點且  $a < a'$ ，則  $b < b'$   
 (5) 此雙曲線同時對稱於  $x$  軸與  $y$  軸。      【104 學測】

**答**：(1)(2)(4)(5) (**第四冊第四章—二次曲線—等軸雙曲線、漸近線**)

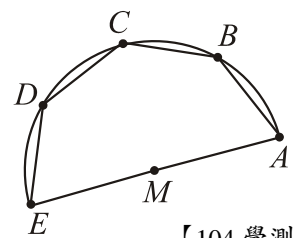
**解**：(1)(2)(5) 本題為等軸雙曲線

(3) 無法確定

(4) 由  $x^2 - y^2 = \text{定值 } k$ ，或直接畫圖，知正確

9. 如圖，以  $M$  為圓心、 $\overline{MA}=8$  為半徑畫圓， $\overline{AE}$  為該圓的直徑， $B$ 、 $C$ 、 $D$  三點皆在圓上，且  $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$ 。若  $\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90^\circ), \sin(\theta+90^\circ))$ 。請選出正確的選項：

- (1)  $\overrightarrow{MA}=8(\cos\theta, \sin\theta)$   
 (2)  $\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45^\circ), \sin(\theta+45^\circ))$   
 (3) (內積)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA}=8$   
 (4) (內積)  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}=0$   
 (5)  $\overrightarrow{BD}=8(\cos\theta + \cos(\theta+90^\circ), \sin\theta + \sin(\theta+90^\circ))$ 。



【104 學測】

答：(2)(4) (第三冊第三章—平面向量)

解：(1) 應為  $\overrightarrow{MA} = 8(\cos(\theta - 45^\circ), \sin(\theta - 45^\circ))$

(3) 應為  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = |\overrightarrow{MA}|^2 = 8^2 = 64$

(5) 應為  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB} = 8(\cos(\theta + 90^\circ) - \cos\theta, \sin(\theta + 90^\circ) - \sin\theta)$

10. 某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。

從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設：

A 為同時有手機與平板電腦的人數

B 為有手機，但沒有平板電腦的人數

C 為沒有手機，但有平板電腦的人數

D 為沒有手機，也沒有平板電腦的人數

請選出恆成立的不等式選項：

(1)  $A > B$  (2)  $A > C$  (3)  $B > C$  (4)  $B > D$  (5)  $C > D$ 。

【104 學測】

答：(2)(3)(4) (第二冊第二章—集合—交集聯集差集補集、迪摩根定理)

解： $n(\text{手機} \cap \text{平版})$ ，最多為 24，最少為  $35 + 24 - 45 = 14$ ，故  $14 \leq A \leq 24$ ，

$n(\text{手機} - \text{平版})$ ，最多為  $35 - \underbrace{14}_{n(\text{手機} \cap \text{平版}) \text{最少}} = 21$ ，

$n(\text{手機} \cap \text{平版})$  最少

最少為  $35 - \underbrace{24}_{n(\text{手機} \cap \text{平版}) \text{最多}} = 11$ ，故  $11 \leq B \leq 21$

$n(\text{手機} \cap \text{平版})$  最多

$n(\text{平版} - \text{手機})$ ，最多為  $24 - \underbrace{14}_{n(\text{手機} \cap \text{平版}) \text{最少}} = 10$ ，

$n(\text{手機} \cap \text{平版})$  最少

最少為  $24 - \underbrace{24}_{n(\text{手機} \cap \text{平版}) \text{最多}} = 0$ ，故  $0 \leq C \leq 10$

$n(\text{手機} \cap \text{平版})$  最多

$n(\text{手機}' \cap \text{平版}') = 45 - n(\text{手機} \cup \text{平版}) = 45 - 35 - 24 + n(\text{手機} \cap \text{平版})$

$= n(\text{手機} \cap \text{平版}) - 14$ ，最多為  $\underbrace{24}_{n(\text{手機} \cap \text{平版}) \text{最多}} - 14 = 10$ ，

$n(\text{手機} \cap \text{平版})$  最多

最少為  $\underbrace{14}_{n(\text{手機} \cap \text{平版}) \text{最少}} - 14 = 0$ ，故  $0 \leq D \leq 10$

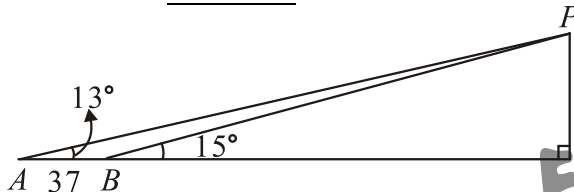
$n(\text{手機} \cap \text{平版})$  最少

### 第貳部分：選填題 (占 50 分)

A. 如圖，老王在平地點 A 測得遠方山頂點 P 的仰角為  $13^\circ$ 。

老王朝著山的方向前進 37 公尺後來到點 B，再測得山頂點 P 的仰角為  $15^\circ$ 。

則山高約為 \_\_\_\_\_ 公尺。(四捨五入至個位數， $\tan 13^\circ \approx 0.231$ ， $\tan 15^\circ \approx 0.268$ )



【104 學測】

答：62 (第三冊第一章—三角測量)

解：
$$\left. \begin{aligned} \tan 13^\circ &= \frac{h}{37+x} \doteq 0.231 \\ \tan 15^\circ &= \frac{h}{x} \doteq 0.268 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \doteq 231, h \doteq 61.908$$

B. 不透明袋中有3白3紅共6個球，球大小形狀相同，僅顏色相異。  
甲、乙、丙、丁、戊5人依甲第一、乙第二、……、戊第五的次序，  
從袋中各取一球，取後不放回。試問在甲、乙取出不同色球的條件下，  
戊取得紅球的機率為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

【104 學測】

答：  $\frac{1}{2}$  (第二冊第三章—條件機率)

解： 
$$\frac{\binom{\text{甲乙}\cdots\text{戊}}{\text{紅白 紅}} + \binom{\text{甲乙}\cdots\text{戊}}{\text{白紅 紅}}}{\binom{\text{甲乙}}{\text{紅白}} + \binom{\text{甲乙}}{\text{白紅}}} = \frac{\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times 2! \left( \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \right) \times 3}{\left( \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \right) \times 2!} = \frac{1}{2}$$

C. 小燦預定在陽台上種植玫瑰、百合、菊花和向日葵等四種盆栽。  
如果陽台上的空間最多能種8盆，可以不必擺滿，並且每種花至少一盆，  
則小燦買盆栽的方法共有\_\_\_\_\_種。

【104 學測】

答： 70 (第二冊第二章—重複組合—非負整數解)

解：  $x+y+z+u \leq 8$  之正整數解  
等同  $x+y+z+u \leq 4$  之非負整數解  
等同  $x+y+z+u+t=4$  之非負整數解  
 $\Rightarrow H_4^5 = C_4^8 = 70$

D. 平面  $x-y+z=0$  與三平面  $x=2$ 、 $x-y=-2$ 、 $x+y=2$  分別相交所得的三直線可圍成  
一個三角形。此三角形之周長化成最簡根式，可表為  $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$   
為正整數且  $b < d$ ，則  $a=_____$ ， $b=_____$ ， $c=_____$ ， $d=_____$ 。

【104 學測】

答：  $(a,b,c,d)=(6,2,2,6)$  (第四冊第二章—空間中的平面)

解： 三平面解聯立 
$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x=2 \\ x-y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+z=0 \\ x=2 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=-2 \\ x+y=2 \end{cases}$$
  
交點分別為  $A(2,4,2)$ 、 $B(2,0,-2)$ 、 $C(0,2,-2)$   
故  $\overline{AB} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{CA} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ ，故周長為  $6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$

E. 坐標平面上，直線  $L_1$  與  $L_2$  的方程式分別為  $x+2y=0$  與  $3x-5y=0$ 。

為了確定平面上某一定點  $P$  的坐標，從  $L_1$  上的一點  $Q_1$  偵測得向量  $\overrightarrow{Q_1P} = (-7,9)$ ，  
再從  $L_2$  上的點  $Q_2$  偵測得向量  $\overrightarrow{Q_2P} = (-6,-8)$ ，則  $P$  點的坐標為\_\_\_\_\_。

【104 學測】

答：  $(9,1)$  (第三冊第三章—平面向量)

解： 直線  $L_1$  與  $L_2$  上的動點  $Q_1(-2t,t)$ ， $Q_2(5s,3s)$ ， $t,s \in R$   
故  $P(-2t-7,t+9) = (5s-6,3s-8)$ ，故  $t=-8$ ， $s=3$ ，即  $P(9,1)$

F. 小華準備向銀行貸款3百萬元當做創業基金，其年利率為3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳\_\_\_\_\_元。

【104 學測】

答：8181（**第一冊第三章—指數—單利複利**）

解：複利本利和 =  $3000000(1+3\%)^3 = 3278181$   
 單利本利和 =  $3000000(1+3\% \times 3) = 3270000$   
 兩者相差8181元

G. 某一公司，有A、B、C三個營業據點，開始時各有36位營業員，為了讓營業員了解各據點業務狀況，所以進行兩次調動。每次調動都是：

將當時A據點營業員中的 $\frac{1}{6}$ 調到B據點、 $\frac{1}{6}$ 調到C據點；

將當時B據點營業員中的 $\frac{1}{6}$ 調到A據點、 $\frac{1}{3}$ 調到C據點；

將當時C據點營業員中的 $\frac{1}{6}$ 調到A據點、 $\frac{1}{6}$ 調到B據點。

則兩次的調動後，C據點有\_\_\_\_\_位營業員。

【104 學測】

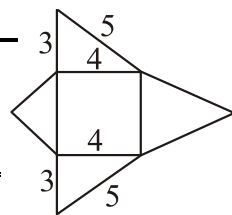
答：44（**第四冊第三章—矩陣—馬可夫轉移矩陣**）

解：

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 36 \\ 30 \\ 42 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 36 \\ 28 \\ 44 \end{bmatrix}$$

開始                  1st                  2nd

H. 有一底面為正方形的四角錐，其展開圖如圖所示，其中兩側面的三角形邊長為3、4、5，則此角錐的體積為\_\_\_\_\_。（化為最簡根式）【104 學測】



答： $\frac{16\sqrt{5}}{3}$ （**第四冊第一章—空間概念**）

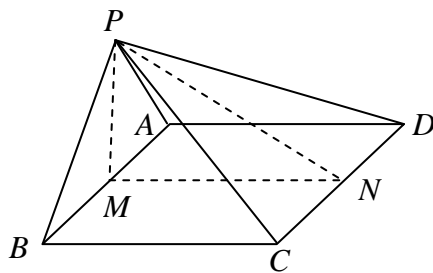
解： $\overline{PM} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{MB}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

$\overline{PN} = \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{NC}^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

故  $\overline{PM}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{PN}^2$

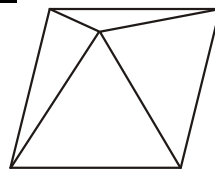
表  $\angle PMN = 90^\circ$

所求體積 =  $4^2 \times \sqrt{5} \times \frac{1}{3} = \frac{16\sqrt{5}}{3}$





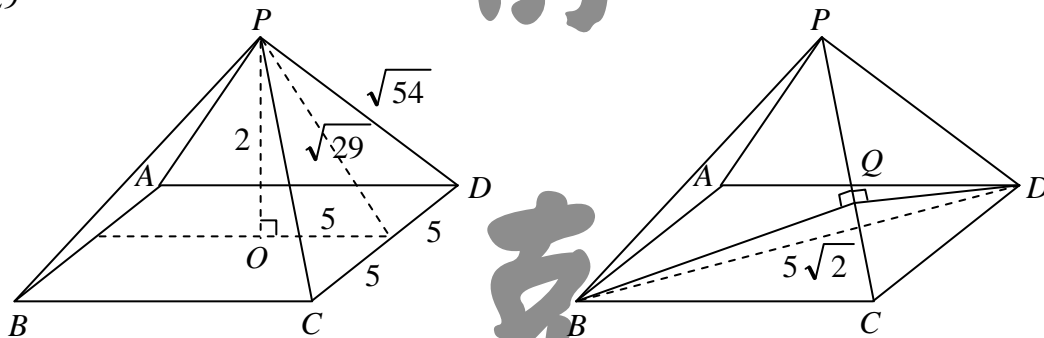
- I. 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 $\theta$ 的正切值 $\tan\theta$ 。若一金字塔（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$ ，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值為\_\_\_\_\_。  
（化為最簡分數）



【104 學測】

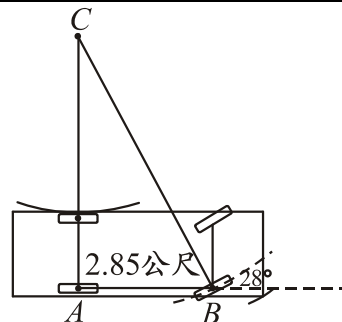
答：  $\frac{25}{29}$  （第四冊第一章—空間概念—兩面角）

解：



$$\overline{BQ} = \overline{DQ} = \frac{5\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}, \cos\phi = \frac{\frac{25 \times 29}{54} + \frac{25 \times 29}{54} - 50}{2 \times \frac{5\sqrt{29}}{3\sqrt{6}} \times \frac{5\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}} = \frac{25}{29}$$

- J. 附圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中A處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為2.85公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了28度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為\_\_\_\_\_公尺。



（小數點後第一位以下四捨五入， $\sin 28^\circ \approx 0.4695$ ， $\cos 28^\circ \approx 0.8829$ ）

【104 學測】

答： 6.1 （第三冊第一章—三角—邊角關係）

解：  $\angle ACB = 28^\circ \Rightarrow \overline{BC} = 2.85 \csc 28^\circ = 2.85 \times \frac{1}{0.4695} \doteq 6.07\dots$

第一冊	單選 2：對數首數尾數（易）	多選 6：多項函數（中）	多選 7：指數函數（中）	選填 F：指數單利複利（中）	單選 1：綜合（易）
第二冊	單選 3：機率（中）	多選 5：統計（易）	多選 10：集合交集聯集（難）	選填 B：條件機率、獨立事件（中）	選填 C：重複組合（中）
第三冊	單選 4：線性規劃（中）	多選 9：平面向量（中）	選填 A：三角測量（易）	選填 E：平面向量（中）	選填 J：三角（易）
第四冊	多選 8：等軸雙曲線（難）	選填 D：空間中的平面（中）	選填 G：馬可夫矩陣（中）	選填 H：空間概念（中）	選填 I：空間兩面角（難）

合計：易 5 題、中 12 題、難 3 題