103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區）　筆試（一）　編號：________________

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 n 是大於 1 的正整數且使得 $(31.5)^n + (32.5)^n$ 為正整數，求所有 n 的可能值為何？

二、已知 x_1、x_2、$\cdots$、x_{2014} 和 y_1、y_2、$\cdots$、y_{2014} 均是正數，

且滿足 $\sum_{i=1}^{2014} x_i \le 1$ 和 $\sum_{i=1}^{2014} y_i \le 2014$。

求證 $(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_{2014}+y_{2014}) \ge 2015^{2014} x_1x_2\cdots x_{2014}y_1y_2\cdots y_{2014}$

三、設函數 $f: R \to R$ 滿足下列三條件：

(1) $f(0)=2014$，

(2) 對任意 $x \in R$，$f(x+2)-f(x) \le 8\cdot 3^x$，

(3) 對任意 $x \in R$，$f(x+6)-f(x) \ge 728\cdot 3^x$.

試求 $f(2014)$ 之值。

四、一組等差為 5 的 402 個數 9, 14, 19, …,2014。證明從這些數中任選出 205 個數，必定會至少有 6 個數 a,b,c,d,e,f，使得 $a+b=c+d=e+f=2028$。