臺北市 103 學年度
普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知 x, y, z 為正實數，滿足 $\left(1+z^2\right)\left(1+\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\right)=(x+y+z)^2$。

在所有滿足上式的 x, y, z 中，令 $y=f(x)$，$z=g(x)$，求 $f(x)$ 與 $g(x)$。

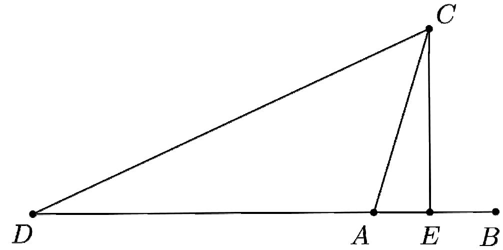
(12 分)

問題二： 將 2014 表示成三個正整數和的方法總共有多少種？

(這三個正整數不必都相異且與次序無關，例如 $1+1+2012$，$1+2012+1$，$2012+1+1$ 都視為同一種) (12 分)

問題三： 如圖，點 A 介於點 B 與點 D 之間且 $\overline{CE}$ 與 $\overline{BD}$ 垂直於點 E，設 $\overline{AC}=1$，$\overline{AD}=x$，$\overline{AE}=y$。若 $\angle BAC$ 是銳角且 $\angle BAC=3\angle BDC$。

試證：$x^3-3x-2y=0$。 (12 分)



問題四： 如圖，A, B, C, D, E 是半徑為 1 的半圓周上之相異點，其中 $\overline{AE}$ 為直徑。

設 $\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DE}=d$。

試證：$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4$。

(13 分)