

# 教育部 103 學年度高級中學數學競賽

## 中投區複賽試題 (一)

編號：\_\_\_\_\_

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、請問整數  $\left\lfloor \frac{10^{20000}}{10^{100} + 3} \right\rfloor$  以十進位表示出來時的個位數字為何？其中  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數。

二、已知對所有的正整數  $n$ ,  $2(2n+1)C_n^{2n}$  可整除  $C_{3n}^{6n}C_n^{3n}$ .

證明： $2(2n+1)(2n+3)C_n^{2n}$  可整除  $3C_{3n}^{6n}C_n^{3n}$ .

三、設  $a, b, c$  為正數且  $a+b+c=1$ . 證明：

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}.$$

四、函數  $f(x) = x^2 - 2ax$  與  $g(x) = -x^2 - 1$  的圖形有兩條公切線且可得到四個切點，若此四個切點組成的四邊形周長為 6，求實數  $a$  的值。

五、下圖的  $\triangle ABC$  中  $\overline{AC} > \overline{AB}$  且  $\angle BAD = \angle CAE$ ,

證明： $\overline{AC} + \overline{AD} > \overline{AB} + \overline{AE}$ .

