新北市 103 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：____________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】

證明：對任意正實數 a,b,c ，不等式

$$\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{3}ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\sqrt{c^2+a^2-\sqrt{3}ca}\ge\sqrt{3}a$$

恆成立，並給出等號成立的充要條件。

(12 分)

【問題二】

假設 A 為一個三位數，且 A 的百位數、十位數、與個位數分別為 a,b,c ，且方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根，證明 A 不是質數。

(12 分)

<背面尚有試題>

【問題三】

若正有理數 m 可以表成 $m=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$ ，其中 a,b,c 為整數，則稱 m 為**<u>金元數</u>**。試問從集合 $S=\left\{\frac{k}{30^r}\,\middle|\,k,r\text{為正整數}\right\}$ 中最多可以找出幾個不同元素，使得這些元素中相異兩數 p,q 都滿足 $|p-q|$ 為金元數？

(12 分)

【問題四】

ΔABC 中 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$ ，$\overline{BC}=6$ ，而 D 為 $\overline{AC}$ 上的一點。設 P 為 $\overline{BD}$ 上的一點使得 $\angle APC=90^\circ$ ，且 $\angle ABP=\angle BCP$ ，如圖所示。求 $\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$ 之值？

(13 分)