

103 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：袋中有黑、白球各一顆，每次從袋中任取一球，取出的球不放回，但再放進一顆黑球，令 a_n 為第 n 次取到黑球的機率。

- (1) 寫出 a_n 的遞迴關係式。 (5 分)
- (2) 求 a_n 的一般式。 (6 分)

《背面尚有試題》

問題二：已知四面體 $EFGH$ 的每個面都是邊長為 1 的正三角形，求

(1) 兩向量 \overrightarrow{EF} 與 \overrightarrow{GH} 的夾角為多少度？ (5 分)

(2) 兩直線 EF 與 GH 的距離為何？ (6 分)

問題三：對任何正整數 n ，證明不等式：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \cdots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \sqrt{2n+1}$$

恆成立。

(12 分)

問題四：在 $1, 2, 3, \dots, 2014$ 中取一組數，使任意兩數的和不能被其差整除。問：

最多能取多少個數？

(12 分)

《試題結束》