

103 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題（一）

注意事項：(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

- (2) 本試卷共五題，滿分 49 分。每題配分標於題末。計算、證明題請務必依序寫在答案卷上。同時必須寫出演算過程或理由。
- (3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 已知三個正實數 a, b, c 滿足 $a+b+c=1$ ，試證：

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}。 \quad (9 \text{ 分})$$

2. 已知三角形 ABC 之三邊長分別為 a, b, c ，且其外接圓半徑為 R ，若

$$R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}，試求 \triangle ABC 的三內角之度數。 \quad (10 \text{ 分})$$

3. 試求方程式 $x^4 + 4^x + 4^{-x} = \frac{21}{4}$ 的所有實數解。 (10 分)

4. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$ 皆為正數，且滿足 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{40} = 40$ 及

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{40}^2 > 100。試證： $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$ 中必有四個數的$$

和大於 10。 (10 分)

5. 如圖，在四邊形 $ABCD$ 中， M 、 N 分別是對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 的中點，

又直線 AD 與直線 BC 相交於點 P 。試證： $\triangle PMN$ 的面積是四邊形

$ABCD$ 面積的四分之一，即 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{4} S_{\text{四邊形} ABCD}$ 。 (10 分)

