

103 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題 (一)

編號：_____

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

(9 分) 一、老師要全班同學每人挑出一個班上讓人討厭的人，但不能選自己。假設每人被選中的機率相同，若全班共有 5 個同學，試問：每個人都剛好得到一票「被討厭」的機率是多少？

(10 分) 二、令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心， AH, BH, CH 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F ； BE, CF 的中點分別為 M, N ； MN 分別交 AB, AC 於 I, J 。

證明：

- (1) I 在 $\triangle BDM$ 的外接圓 O_B 上； J 在 $\triangle CDN$ 的外接圓 O_C 上，
- (2) O_B 與 O_C 相切於點 D 。

(10 分) 三、設 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$ ，且 $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = \sqrt{3}$ 。證明

$$\tan(2\alpha) + \tan(2\beta) + \tan(2\gamma) \geq 9.$$

(10 分) 四、某數學營開了 6 門課，該營隊的 20 名學生每人均已選修其中的 0 至 6 門課。試問：是否可以找出 5 名學生和 2 門課，使得這 5 人同時都選修此 2 門課或同時都沒選修此 2 門課？為甚麼？

(10 分) 五、若 n 為正整數，且 $4^n + 2^n + 1$ 為質數，則 n 必為 3 的(冪)次方。