

103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（屏東區）

□試 題

1. 在一個有限項的實數列中，任何 7 個連續項之和為負數，而任何 11 個連續項之和為正數，試問這樣的數列最多有幾項？

解：

設數列 a_1, a_2, \dots, a_n 滿足要求，先證明 $n \leq 16$ 。

若 $n \geq 17$ ，則考慮下面陣列

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$

$a_2, a_3, a_4, \dots, a_{12}$

$a_3, a_4, a_5, \dots, a_{13}$

$a_4, a_5, a_6, \dots, a_{14}$

$a_5, a_6, a_7, \dots, a_{15}$

$a_6, a_7, a_8, \dots, a_{16}$

$a_7, a_8, a_9, \dots, a_{17}$

因為 11 個連續項之和為正數，所以每一橫列之和皆為正數，於是整個陣列總和為正數。另外，因為任 7 個連續數之和為負數，所以每一行知何為負數，於是整個陣列總和為負數。矛盾。所以 $n \leq 16$ 。n=16 的數列如下：

5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5。

□試 題

設 $f(x) = ax^2 - 2(a-b)x + a - 2b + c$, $a \neq 0$ 。 若 $0 \leq x \leq 2$, 則 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 。
試證, 若 $0 \leq x \leq 2$, 則 $|ax + 2b| \leq 4$

【參考解答】 $f(1) = c$, $f(0) = a - 2b + c$, $f(2) = a + 2b + c$

$$a = \frac{1}{2}[f(0) + f(2) - 2f(1)]$$

$$b = \frac{1}{4}[f(2) - f(0)]$$

$$\begin{aligned} |ax + 2b| &= \frac{1}{2} |(f(0) + f(2) - 2f(1))x + f(2) - f(0)| \\ &= \frac{1}{2} |(x-1)f(0) + f(2)(x+1) - 2f(1)x| \\ &\leq \frac{1}{2} [|x-1| + |x+1| + 2|x|] = 4 \end{aligned}$$