臺北市 103 學年度

普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽

數學科口試試題

編號：____________________（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共 2 大題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回本試卷。

2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，請不必太專注於計算的過程。

【試題一】 當三正整數 a,b,c 滿足 $a^2+b^2=c^2$ 時，稱 a,b,c 為一組畢氏三元數；又當 a,b,c 為一組畢氏三元數且其最大公因數為 1，則稱 a,b,c 為一組本原畢氏三元數。

(1) 當 a,b,c 為本原畢氏三元數，已知存在二正整數 $m>n$，使得

$$(a,b)=\left(m^2-n^2,2mn\right) \text{ 或 } \left(2mn,m^2-n^2\right) \text{ 而 } c=m^2+n^2 \text{ 。}$$

試解說此時 m,n 互質且其奇偶性相反。

(2) 當 a,b,c 為任一組畢氏三元數，是否存在二正整數 p,q 且 $p>q$ 使得

$$(a,b)=\left(p^2-q^2,2pq\right) \text{ 或 } \left(2pq,p^2-q^2\right), c=p^2+q^2 ?$$

【試題二】 ΔABC 中，$\angle B$ 與 $\angle C$ 為其二內角。點 E 在射線 $\overrightarrow{CA}$ 上且 $\overline{BE}$ 平分 $\angle B$ 的一個外角；點 F 在射線 $\overrightarrow{BA}$ 上且 $\overline{CF}$ 平分 $\angle C$ 的一個外角。

試證：若 $\angle B<\angle C$，則 $\overline{BE}>\overline{CF}$ 。