103 年度中正國防幹部預備學校數學科教師甄試試題

詳解：

一、填充題：每題須有計算過程，並將答案填入空格中。

1．已知 $ABCDEF$ 是邊長為 2 的正六邊形，若拋物線 Γ 恰經過 A、B、C、D 四點，則拋物線 Γ 的焦距為＿＿＿＿＿。

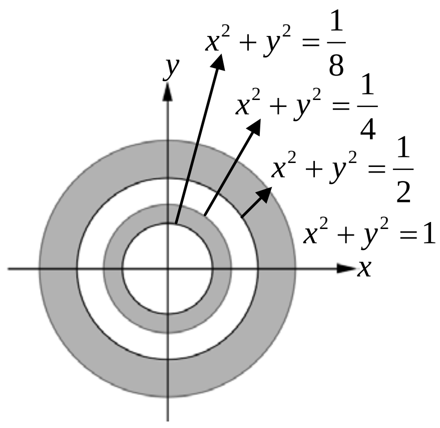
Ans：$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解：建立坐標系，使 A、B、C、D 的坐標分別為 $(-2,\sqrt{3})$，$(-1,0)$，$(1,0)$，$(2,\sqrt{3})$

則可求得拋物線 Γ 的方程式為 $x^2=\sqrt{3}(y+\dfrac{1}{\sqrt{3}})\Rightarrow 4c=\sqrt{3}$，故焦距為 $|c|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

2．不等式 $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-\frac{1}{2})(x^2+y^2-\frac{1}{4})\cdots(x^2+y^2-\frac{1}{2^{n-1}})\cdots\le 0$ 所圍區域的面積為＿＿＿＿。

Ans：$\dfrac{2\pi}{3}$



解：所求之解為 $\frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 1$ 或 $\frac{1}{4}\le x^2+y^2\le\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{8}\le x^2+y^2\le\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{16}\le x^2+y^2\le\frac{1}{8}\dots$

所圍區域的面積為 $\pi(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots)=\pi\times(\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{2})})=\dfrac{2\pi}{3}$ 。

3．設 S 為 $(1+ix)^{2345}$ 的展開式中實部的所有係數和，試求 $\log_2 S=$＿＿＿＿＿。

Ans：1172

解：設 $f(x)=(1+ix)^{2345}$，則

$(1+ix)^{2345}$ 的展開式中實部的所有係數和即為 $f(x)$ 中偶次項的係數和

$\Rightarrow\ S=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\dfrac{1}{2}\left[(1+i)^{2345}+(1-i)^{2345}\right]=2^{1172}$

$\Rightarrow\ \log_2 S=\log_2 2^{1172}=1172$

4．在 ΔABC 中，若 $\tan A\tan B=\tan A\tan C+\tan C\tan B$，則 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=$＿＿＿＿＿。

Ans：3

解：切割化弦，已知等式即 $\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin A\sin C}{\cos A\cos C}+\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$ ，

$\Rightarrow\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}\right)\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C}\Rightarrow\dfrac{\sin A\sin B}{\sin C}=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}\right)\cdot\dfrac{\cos A\cos B}{\cos C}$

$\Rightarrow\dfrac{\sin A\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos C}\Rightarrow\dfrac{\sin A\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos C}=\dfrac{\sin(\pi-C)}{\cos C}$

$\Rightarrow\dfrac{\sin A\sin B\cos C}{\sin^2 C}=1$，由正弦定理得 $\dfrac{ab\cos C}{c^2}=1$，又由餘弦定理可得 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2c^2}=1$

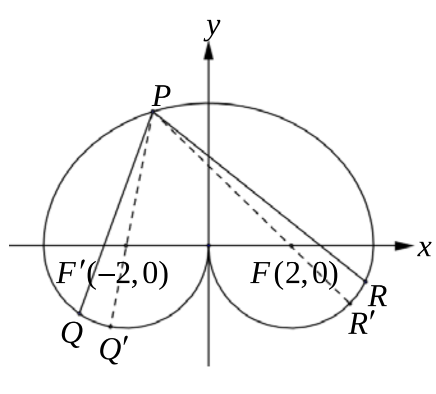
故 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=3$

5．在 xy 平面上，Γ 表示：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 且 $y\ge 0$ 的圖形，C_1 表示：$(x+2)^2+y^2=4$ 且 $y\le 0$ 的圖形，C_2 表示：$(x-2)^2+y^2=4$ 且 $y\le 0$ 的圖形，設 P、Q、R 分別為 Γ、C_1、C_2 上的動點，則 $\overline{PQ}+\overline{PR}$ 之最大值為＿＿＿＿＿＿。

Ans：12

解：如右圖，$\overline{PQ}+\overline{PR}\le\overline{PF'}+\overline{F'Q}+\overline{PF}+\overline{FR}$

$=\overline{PF'}+\overline{F'Q'}+\overline{PF}+\overline{FR'}$



$\Rightarrow \overline{PQ}+\overline{PR} \le (\overline{PF'}+\overline{PF})+\overline{F'Q'}+\overline{FR'}$

$= 2a+r+r = 8+2+2 = 12$

即 $\overline{PQ}+\overline{PR}$ 之最大值為 12

6．設擲一顆公正的骰子連續 3 次，出現的點數分別為(a, b, c)，則 a, b, c 可形成等腰三角的三邊長之機率為＿＿＿＿＿。

Ans：$\dfrac{23}{72}$

解：(1)若 a, b, c 為三同：

$\Rightarrow$ (a, b, c) = (1,1,1)；(2,2,2)；(3,3,3)；(4,4,4)；(5,5,5)；(6,6,6)

(2)若 a, b, c 為二同一異：

$\Rightarrow$ 令 $a=b\ne c$ 且 $a+b=a+a>c$

$c=1 \Rightarrow a=b=2\sim 6$；

$c=2 \Rightarrow a=b=3\sim 6$；

$c=3 \Rightarrow a=b=2$、4、5、6；

$c=4 \Rightarrow a=b=3$、5、6；

$c=5 \Rightarrow a=b=3$、4、6；

$c=6 \Rightarrow a=b=4$、5；

故共有(5+4+4+3+3+2)×$\dfrac{3!}{2!}$ = 63(種)

由(1)(2)所求之機率為 $\dfrac{6+63}{6^3}=\dfrac{23}{72}$

7．數列 1，2，3，2，3，4，5，3，4，5，6，7，4，5，6，7，8，9，……，若依此規律，則此數列的第 2014 項的數字為＿＿＿＿＿。

Ans：62

解：把有序數組(1，2，3)，(2，3，4，5)，(3，4，5，6，7)，(4，5，6，7，8，9)，……

記作群數列 $\langle A_n\rangle$，則第 n 群 A_n 中共有 n+2 個連續自然數，其中第 1 個數為 n，最後一個數這 2 n+1。

當 n = 61 時，前 61 個群中的所有項的數字和為 $\dfrac{(3+63)\times 61}{2}=2013$。

所以已知數列的第 2014 項是 $\langle A_{62}\rangle$ 中的第 1 個數，即為 62。

8．定義在 R 上的函數 $f(x)$ 滿足 $f(0)=0$，$f(x)+f(1-x)=1$，$f\left(\dfrac{x}{5}\right)=\dfrac{1}{2}f(x)$，且當 $0\le x_1<x_2\le 1$ 時，$f(x_1)\le f(x_2)$，則 $f\left(\dfrac{1}{2014}\right)$=＿＿＿＿＿。

Ans：$\dfrac{1}{32}$

解：令 x=1，則 $f(1)+f(0)=1$，$f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{2}f(1)$，又 $f(0)=0$，可得 $f(1)=1$；$f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$

令 $x=\dfrac{1}{5}$，則 $f\left(\dfrac{1}{5}\right)+f\left(\dfrac{4}{5}\right)=1 \Rightarrow f\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$

因當 $0\le x_1<x_2\le 1$，恆有 $f(x_1)\le f(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{5}\le x\le \dfrac{4}{5}$，恆有 $f(x)=\dfrac{1}{2}$

由 $f\left(\dfrac{x}{5}\right)=\dfrac{1}{2}f(x) \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot f(5x)$

$$f\left(\frac{1}{2014}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{5}{2014}\right)=(\frac{1}{2})^2 f\left(\frac{5^2}{2014}\right)=(\frac{1}{2})^3 f\left(\frac{5^3}{2014}\right)=(\frac{1}{2})^4 f\left(\frac{5^4}{2014}\right)$$

因為 $\dfrac{1}{5}<\dfrac{5^4}{2014}<\dfrac{4}{5}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2014}\right)=(\dfrac{1}{2})^4\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{32}$

9．在坐標平面上的點序列 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\cdots$，對所有的 $n=1, 2, 3, \cdots$ 都滿足

$(a_{n+1},b_{n+1})=(\sqrt{3}a_n-b_n,\sqrt{3}b_n+a_n)$，若 $(a_{100},b_{100})=(2,4)$，則 $a_1+b_1=$ ＿＿＿＿ 。

Ans：$\dfrac{1}{2^{98}}$

解：$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，

設 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$，則 $A^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos 30^\circ n & -\sin 30^\circ n \\ \sin 30^\circ n & \cos 30^\circ n \end{bmatrix}$，

因 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} \cos 30^\circ n & -\sin 30^\circ n \\ \sin 30^\circ n & \cos 30^\circ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$，

故 $\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = A^{99} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 2^{99} \begin{bmatrix} \cos 2970^\circ & -\sin 2970^\circ \\ \sin 2970^\circ & \cos 2970^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 2^{99} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 2^{99} \begin{bmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$，

可得 $a_1 = \frac{1}{2^{99}} b_{100} = \frac{1}{2^{97}}$，且 $b_1 = -\frac{1}{2^{99}} a_{100} = -\frac{1}{2^{98}}$，故 $a_1 + b_1 = \frac{1}{2^{97}} - \frac{1}{2^{98}} = \frac{1}{2^{98}}$。

10．在複數平面上，ΔABC 的頂點 A,B,C 所對應的複數分別為 $3+2i$，$3i$，$2-i$，若動點 P 所對應的複數為 z，且關於動點 P 之軌跡方程式 $|z|^2 + \alpha \cdot z + \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \beta = 0$ 恰表示 ΔABC 外接圓，其中 α, β 為複數，則 $\alpha + \beta$ =＿＿＿＿＿。

Ans：$-4+i$

解：由已知得 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 且 $\overline{AB} \perp \overline{AC}$，即 ΔABC 為等腰直角三角形，

故其外接圓方程式為 $|z-(1+i)| = \sqrt{5}$，平方整理：$|z|^2 - \overline{(1+i)} \cdot z - (1+i) \cdot \overline{z} - 3 = 0$

比較係數可得 $\alpha = -1+i, \beta = -3 \Rightarrow \alpha + \beta = -4+i$

11．已知等差數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 項的和分別為 A_n 和 B_n，且 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{7n+41}{n+3}$，則使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 為整數的正整數 n 的個數有＿＿＿＿＿個。

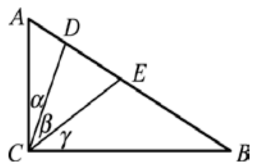
Ans：3

解：$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2a_n}{2b_n} = \frac{a_1 + a_{2n-1}}{b_1 + b_{2n-1}} = \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}} = \frac{7(2n-1)+41}{2n-1+3} = \frac{7n+17}{n+1} = 7 + \frac{10}{n+1} \in \mathbf{Z}$，

故 $n = 1$、4 或 9，共 3 個。

12．如右圖，ΔABC 中，$\angle C = 90^\circ$，且 $3\overline{AD} = 2\overline{DE} = \overline{EB}$，已知 $\angle ACD = \alpha$，$\angle DCE = \beta$，$\angle ECB = \gamma$，求 $\frac{\csc \alpha \times \csc \gamma}{\csc \beta}$ ＝＿＿＿＿＿＿。

Ans：$\frac{11}{4}$



解：設 $\overline{CD} = m, \overline{CE} = n$，$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} = \frac{\frac{1}{2} ab \cdot \frac{1}{2} mn \sin \beta}{\frac{1}{2} bm \sin \alpha \cdot na \frac{1}{2} \sin \gamma} = \frac{\Delta \cdot \frac{3}{11} \Delta}{\frac{2}{11} \Delta \cdot \frac{6}{11} \Delta} = \frac{11}{4}$

(註：Δ 表 ΔABC 之面積)

13．若八位數 N 同時滿足下列兩個條件：

(i) N 的每一位數字是1或2或3

(ii) N 各位數字中，1恰出現偶數次(含0次)

試求此種八位數 N 之個數共有＿＿＿＿＿個。

Ans：3281

解：$C_0^8 \cdot 2^8 + C_2^8 \cdot 2^6 + C_4^8 \cdot 2^4 + C_6^8 \cdot 2^2 + C_8^8 \cdot 2^0 = \frac{3^8+1}{2} = 3281$

14．在直角坐標系中有三點 $A(0,1)$，$B(1,3)$，$C(2,6)$，已知在直線 L：$y = ax + b$ 上有三點 D、E、F 的 x 坐標分別為 0、1、2，試求直線 L 的方程式使得 $\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2$ 達到最小值？

Ans：$15x - 6y + 5 = 0$

解：由題意可知 D, E, F 的坐標分別為 $D(0, b)$，$E(1, a+b)$, $F(2, 2a+b)$，則

$$\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2 = (b-1)^2 + (a+b-3)^2 + (2a+b-6)^2$$

由柯西不等式得

$$\left[1^2 + 2^2 + 1^2\right]\left[(b-1)^2 + (a+b-3)^2 + (2a+b-6)^2\right] \geq \left[1 \cdot (b-1) + 2 \cdot (a+b-3) + 1 \cdot (2a+b-6)\right]^2 = 1$$ 所以

$\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2=(b-1)^2+(a+b-3)^2+(2a+b-6)^2\geq\dfrac{1}{6}$

當 $\dfrac{b-1}{1}=\dfrac{3-a-b}{2}=\dfrac{2a+b-6}{1}\Rightarrow a=\dfrac{5}{2},b=\dfrac{5}{6}$ 時 $\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2$ 達到最小值。

此時直線 L 的方程式為 $15x-6y+5=0$

15．設 $f(x)$為三次多項式，α,β,γ 為方程式 $f(x)=0$ 的根，若 $\dfrac{f(\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})}{f(0)}=619$，試求

$\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}=$__________。

Ans：1234

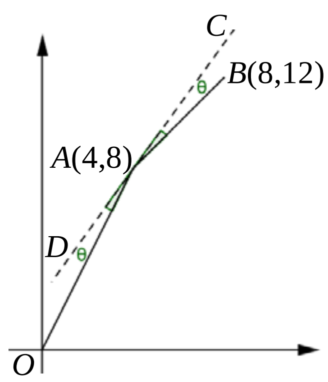
解：令 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，則 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{a_2}{a_3}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{a_0}{a_3}\end{cases}$，

而 $\begin{cases}f(\frac{1}{2})=\dfrac{a_3}{8}+\dfrac{a_2}{4}+\dfrac{a_1}{2}+a_0\\ f(-\frac{1}{2})=-\dfrac{a_3}{8}+\dfrac{a_2}{4}-\dfrac{a_1}{2}+a_0\end{cases}\Rightarrow 619=\dfrac{\frac{a_2}{2}+2a_0}{a_0}=\dfrac{a_2}{2a_0}+2$，

故 $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{a_2}{a_0}=2(619-2)=1234$

16．從原點出發的一道光線，射在鏡面(視為一直線)上的一點 $A(4,8)$且反射到點 $B(8,12)$，求鏡面的斜率為__________。

Ans：$\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$



解：設鏡面的斜率為 m，$m_{\overline{OA}}=2,m_{\overline{AB}}=1$

由 $\tan\angle OAD=\tan\angle BAC\Rightarrow\dfrac{2-m}{1+2m}=\dfrac{m-1}{1+m}$

$\Rightarrow 3m^2-2m-3=0\Rightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$(負不合)

二、計算證明題：

1．設 a, b, c, d 均為實數，且 $a+b+c+d=3$，$a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$，求證：$1\leq a\leq 2$

解：令 $b+c+d=3-a$，$2b^2+3c^2+6d^2=5-a^2$

由柯西不等式知 $[(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2+(\sqrt{6}d)^2][(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(\frac{1}{\sqrt{6}})^2]\geq(b+c+d)^2$

$\Rightarrow (5-a^2)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\geq(3-a)^2\Rightarrow(5-a^2)\cdot 1\geq 9-6a+a^2\Rightarrow a^2-3a+2\leq 0$，即 $1\leq a\leq 2$

2．在平面上 ΔABC 和一點 O 滿足：$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{AB}^2$，

試證：O 是 ΔABC 的垂心

解：$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{CA}^2\Rightarrow\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2-\left(\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2\right)=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{BA}-\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot 2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{OC}$；

同理可證：$\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{OA}$ 且 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{OB}$，

故 O 為 ΔABC 的垂心