

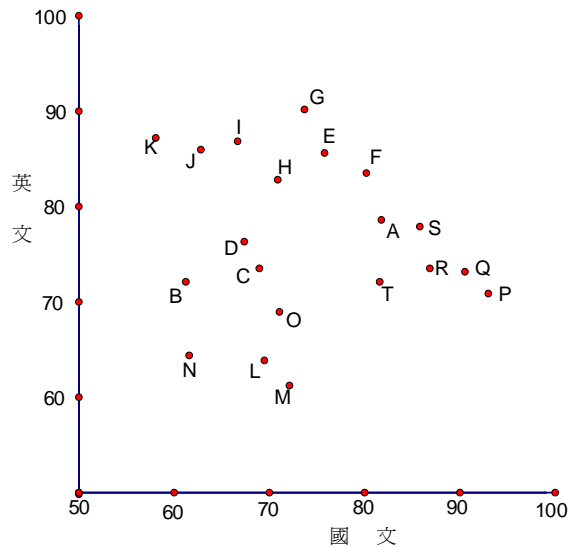
臺北市立松山家商99學年度教師甄選初試

數學 科試題卷

一、填充題(每題 5 分，共 30 分)

1. 滿足不定方程組 $1426x + 1054y = 62$ 且 $99 \leq x \leq 2010$ 的整數數對 (x, y) 共有_____組。
2. 不等式 $\sqrt{25-x^2} > x-1$ 的解為_____。
3. 有一台測謊機，當受測者說實話時，它測得對方說實話的機率為 0.9，而當受測者說謊話時，它測得對方說謊話的機率為 0.8。又有甲、乙、丙三人，他們不是說實話就是說謊話，每個人說實話的機率分別都是 0.5，而且不互相影響。今袋中有 2 白球 3 黑球，從中隨機取出 1 球，甲乙丙看完後都說是黑球，再接受此機器測謊，它卻宣稱甲乙說實話而丙說謊話。請問該球確實是黑球之機率為_____。

4. 右圖是某次期中考，隨機抽樣調查高三 20 位同學 A,B,...,T 等人的國文、英文成績所畫出的散佈圖。對這 20 位學生，算出每個人的國文、英文兩科的平均成績(即相加再除以 2)。請問，哪個人(或哪些人)的平均成績是這 20 個平均成績的中位數？
答：_____。



5. 設等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜邊 $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ ， M 為 \overline{AB} 之中點。將 $\triangle AMC$ 沿著 \overline{CM} 摺起，使摺起後產生的三角形 $\triangle A'MC$ 與 $\triangle BMC$ 夾 60° 。求四面體 $A'MBC$ 的體積為_____立方單位。
6. 將 xy 平面上的區域 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \leq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 繞 xy 平面上的直線 $x = y$ 在空間中旋轉一圈所得的旋轉體體積=_____。

二、演算題(共 70 分)

1. 試證：關於 a, b, c 的不定方程式 $2009^a + 101^b = c^2$ 沒有正整數解。(6 分)

2. (1)求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 之和。(3分) (2)試證無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂。(3分)

3. 設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\overline{BC} = 2\sqrt{39}$ 。點 E, F 分別在 $\overline{AC}, \overline{AB}$ 上且

$\overline{BE} \perp \overline{AC}, \overline{CF} \perp \overline{AB}$ ，又 \overline{BE} 交 \overline{CF} 於 P 點。若 $\overline{CP} = 2\sqrt{3}$ ，求

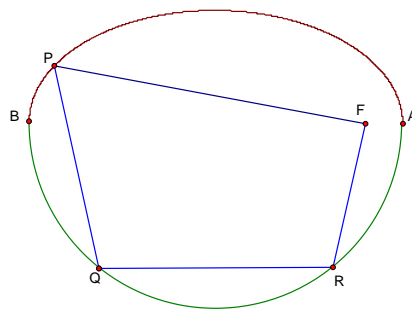
(1) $\triangle ABC$ 的面積。(5分)

(2) $\triangle AEF$ 的外接圓的面積。(6分)

4. 如右圖，在座標平面上，將橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ 的上半部

及圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的下半部組合而成一封閉曲線

(其中， A, B 為此橢圓與圓的交點)。今有一光線從此橢圓的一焦點 F 射向橢圓上半部的 P 點，依光學原理反射至下半圓的 Q 點，再依光學原理反射至下半圓的 R 點，再依光學原理反射。



若 $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ 且在 R 點的反射線通過 F ，請求出四邊形 $FPQR$ 的周長(5分)

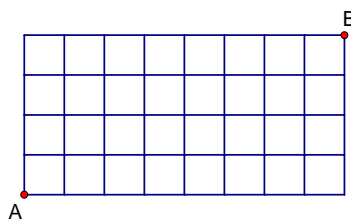
及面積(7分)

5. (1)如右之街道圖中，每一小格皆是邊長 1 單位的正方形。

為了方便，我們簡稱此街道圖的規格為 8×4 。

小松從 A 點出發，要沿著街道走捷徑到 B 點。因為溽暑難耐，他每走 1 單位或每走 2 單位就停下來休息一下。

請問，在如上所述的條件下，從 A 到 B 共有幾種走法？(6分)



(2)我們可將(1)中之街道圖規格改為 $m \times n$ (m, n 為正整數)，而在(1)所述的規則下，考慮從 A 到 B 共有幾種走法。

設規格為 $m \times n, m \times (n+1), (m+1) \times (n+1)$ 的街道圖所對應之走法數分別

是 x, y, z ，請將 z 用 x, y 及 m, n 表示。(6分)

6. 某次數學考試應考者眾多，隨機抽樣出甲乙丙...壬癸等 10 人調查他們的成績。若此 10 人的平均成績為 82 分，且癸考了 73 分，求此 10 人之成績的樣本標準差的最小值。(11分)

7. 設 k 為實數。若對於任意實數 t ，關於四個未知實數 x, y, z, w 的方程組

$$\begin{cases} -tx + 2y + 0z + kw = 0 \\ -2x - ty + 0z + 0w = 0 \\ 0x + 4y + (-1-t)z - 2w = 0 \\ 0x + 0y + 2z + (-1-t)w = 0 \end{cases}$$

皆只有唯一一組解 $x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$ ，試求出 k 的範圍。(12分)