教育部受託辦理 103 學年度公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題 12 題及綜合題 2 大題，共計 100 分；**選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在答案本上作答**。本科不可以使用電子計算器

第一部分：選擇題（共 40 分）

一、單選題：（每題 3 分，共 24 分）

(A) 1.某人打靶命中後，再命中的機率為0.8，不命中後再命中之機率為0.6，若第 n 回命中機率為 P_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=$　(A)$\frac{3}{4}$　(B)$\frac{5}{7}$　(C)$\frac{5}{8}$　(D)$\frac{7}{10}$。

(D) 2.設 $(|x|+|y|-1)\cdot(|x|+|y|-\frac{1}{2})\cdot(|x|+|y|-\frac{1}{4})\cdots(|x|+|y|-\frac{1}{2^{n-1}})\le 0$；所表示的圖形面積為 a_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$　(A)$\frac{4}{5}$　(B)$\frac{6}{5}$　(C)$\frac{7}{5}$　(D)$\frac{8}{5}$　(E)$\frac{9}{5}$。

(C) 3.將點 P 先以原點 O 為中心逆時針旋轉 80°，再對直線 $L:(\sqrt{3}-1)x-(\sqrt{3}+1)y=0$ 鏡射，其結果相當於對直線 $y=(\tan\theta)x$ 鏡射，若 $0^\circ<\theta<180^\circ$，則 $\theta=$　(A)145°　(B)150°　(C)155°　(D)160°。

(C) 4.$x\in R$，$f(x)=|x^2-4x|-4$，試求 $f(x)$ 之最小值為　(A)0　(B)4　(C)-4　(D)-8。

(D) 5.方程式 $(x-2)^2=2^{x-2}$ 的實數根個數有幾個？　(A)0個　(B)1個　(C)2個　(D)3個。

(B) 6.10人各自帶一件禮物參加聯誼晚會，晚會結束抽籤選禮物，則此10人沒有人抽選到自己的禮物機率值最接近哪一選項？　(A) 0.15　(B) 0.35　(C) 0.75　(D) 0.9。

(D) 7.已知 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，則 $\cos\alpha\sin\beta$ 的取值範圍為　(A)$\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$　(B)$[-1,1]$　(C)$\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$　(D)$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$。

(B) 8.設 a 為整數時，滿足二次方程式 $x^2-ax+a^2-4=0$ 僅有一正根，則整數 a 有幾組解？　(A)3　(B)4　(C)5　(D)6。

二、複選題：（每題 4 分，共 16 分）

(ABD) 9.下列敘述何者正確？
(A)五個不同的球，任意放入三個相同的箱子，共41種方法
(B)五個不同的球，任意放入三個不同的箱子，共243種方法
(C)五個相同的球，任意放入三個不同的箱子，共243種方法
(D)五個相同的球，任意放入三個相同的箱子，共5種方法

(AB　) 10.設 $a\in N$；$360<a<400$ 且 b 為四位正整數，又 $\log_{10}a$ 之尾數是 $\log_{10}b$ 尾數的2倍，則下列何者正確？(A) a 是一完全平方數　(B) b 為100的倍數　(C) $2000<b<2500$　(D) a 為偶數。

(BCD) 11.一個正八面體，稜長為1，試求下列選項哪些是正確的？　(A)相鄰兩面夾角的最大值為

公告用

$\cos^{-1}\frac{1}{3}$　(B)相鄰兩面夾角的最大值為 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$　(C)此正八面體體積為 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(D)此正八面體表面積為 $2\sqrt{3}$。

(ABC) 12.設 n 為正整數時，$(3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$，其中 $a_n, b_n \in Z$，則下列選項何者正確？

(A) $(3-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$　(C) $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$

(D)若點 P_n 的坐標為 (a_n, b_n)，直線 $P_{n+1}P_n$ 的斜率為 m_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \sqrt{2}$

第二部分：綜合題（共 60 分）

一、填充題：（每題 4 分，共 28 分）

1. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$；則使 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的最小自然數 $n=$___12____。

2. 設有兩個俄國人，三個美國人，兩個台灣人，七人排成一列，規定美國人與俄國人不相鄰，請問共有幾種排法__360___。

3. 設三階方陣 $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$，$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，化簡 $(A+I)^{2014} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$。

4. 在橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 內，作所有斜率為 2 的平行弦，取所有平行弦中點 $M(x, y)$，試求所有 $M(x, y)$ 點滿足的軌跡方程式為 $\underline{2x+9y=0}$。

5. 空間中，平面 $E_1 // E_2$，若 A、B 兩點在平面 E_1 上，分別向平面 E_2 引斜線 $\overleftrightarrow{AC}$，$\overleftrightarrow{BD}$，其中 C、D 兩點在平面 E_2 上，且 $\overline{AC} = 40$、$\overline{BD} = 41$，$\overline{AC}$ 在平面 E_2 的正射影長為 12，則 $\overline{BD}$ 在平面 E_2 的正射影長為__15___。

6. 設 a，b，x 為相異正數，$ab \neq 1$，若 $a^{\log ax} = b^{\log bx}$，則 $(ab)^{\log(abx)}$ 值=___1____。

7. 用半徑為 R 的圓形鐵皮，剪成一個圓心角為 θ 的扇形，並將其製成圓錐形的漏斗，問 θ 值= $\underline{\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi}$ 時，此圓錐漏斗的容積為最大。

二、計算證明題：(每題 8 分，共 32 分；必須詳列出計算過程)

1. 已知三元一次聯立方程組：$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=6 \\ 3x+4y+2z=8 \end{cases}$ 之解為 (x, y, z)，試求 $x^2+y^2+z^2$ 之最小值。

2. $f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3$，若 $0 \le x \le 4$ 則 $f(x) > 0$ 一定成立；求 m 的範圍？

3. 求證：若 n 為整數時，$n^2 + 103n + 2014$ 恆不能被 2000 整除。

公告用

4. 設 $a_n = \sin^n\theta + \cos^n\theta$，其中 n 為正整數，若 $a_1 = \sin\theta + \cos\theta$ 為有理數，求證 a_n 均為有理數。

公告用