

國立臺中第二高級中學 102 學年度第一學期第三次教師甄選 數學科試題

請填寫准考證號碼 \_\_\_\_\_

一、填充題：每格 6 分，共 60 分。

- 若  $\frac{1}{1-x+x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ ，其中  $|x| < 1, a_0, a_1, a_2, \dots \in R$ ，則  $a_0 + a_1 + \dots + a_{37} =$  \_\_\_\_\_。
- 各位數字和為 12 的四位數有 \_\_\_\_\_ 個。
- 袋中有紅球 3 顆，黃球 4 顆，藍球 5 顆，且每個球被取到的機會均等。今每次取出一球不放回袋中，連續取球，則紅球先取完的機率為 \_\_\_\_\_。
- $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ，則函數  $f(x) = \cos x + \frac{4}{\cos x}$  的最小值為 \_\_\_\_\_。
- 若  $1 < a < b < a^2$ ，且  $P = \log_a b, Q = \log_b a, R = \log_a \frac{a}{b}, S = \frac{1}{2}, T = \log_b \frac{b}{a}$ ，則 P、Q、R、S、T 由小到大排列的順序為 \_\_\_\_\_。
- 若不等式  $(x-1)(x+2) > mx+1$  的解為  $x > \beta$  或  $x < \alpha$ ，其中  $\alpha < \beta$ ，則滿足不等式  $(x-\alpha)(x-\beta) + mx - 3 \leq 0$  的解為 \_\_\_\_\_。
- 若  $\alpha, \beta, \gamma$  為  $x^3 - 2x + 3 = 0$  的三根，則  $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 =$  \_\_\_\_\_。
- 有一遊戲規則如下：先投擲一公正骰子，得點數  $n$ ，
  - 若  $n$  為奇數，則進一步投擲三個公正骰子，若三骰子出現之最大點數恰為  $n$  時，則可得  $n$  元。  
(最大點數不為  $n$ ，則得 0 元)
  - 若  $n$  為偶數，則需付出  $x$  元。
 為使此遊戲公平，則  $x$  應為 \_\_\_\_\_ 元。
- 在坐標平面上，設  $O$  為原點，向量  $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (2, 1), \vec{c} = (1, 1), \vec{d} = (-1, 1)$ ， $P$  為平面上的動點，令點集合  $A = \{P | \vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b} \text{ 且 } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，點集合  $B = \{P | \vec{OP} = x\vec{c} + y\vec{d} \text{ 且 } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，則區域  $A \cap B$  的面積為 \_\_\_\_\_。
- 已知某試驗每次成功機率為  $\frac{1}{5}$ ，現在做  $n$  次，其中有  $X$  次成功，若  $P(X \geq 1) \geq 0.8$ ，則  $n$  的最小值為 \_\_\_\_\_。

二、計算題：每題 8 分，共 40 分。

- 空間中有三個平面  $E_1, E_2, E_3$ ， $E_1$  與  $E_2$  交於直線  $L: \frac{x+5}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-a}{1}$ ， $E_2$  與  $E_3$  交於直線  $M: \frac{x+a}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ ，則  $E_2$  的方程式為何？(以一般式表示)
- 橢圓  $\Gamma$  的焦點為  $A$  與  $B$ ，且  $P$  與  $Q$  在  $\Gamma$  上，已知  $\overline{PA} = 3, \overline{PB} = 7, \overline{QA} = 4$ ，且  $\triangle PAB$  與  $\triangle QAB$  的面積比為  $2:\sqrt{5}$ ，則  $\Gamma$  的短軸長度為何？
- 某新產品對單價及銷售量做市場調查，資料如下表：

|         |    |    |     |     |
|---------|----|----|-----|-----|
| 單價(元)   | 80 | 90 | 110 | 120 |
| 銷售量(萬盒) | 11 | 12 | 8   | 9   |

- 利用最小平方方法求出最適合直線
- 若預估單價定為 100 元時，則銷售量為幾萬盒？
- 設  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$ ，若  $f(x) = 0$  有相異兩正根、一負根，則實數  $k$  的範圍為何？
- 數列  $\langle a_n \rangle$  的遞迴定義式為  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{5a_{n-1}}{3a_{n-1} + 4} \end{cases} (n \in N, n \geq 2)$ ，則一般項  $a_n$  為何？