國立金門高級中學102學年度第1次教師甄試數學科試題

說明：1. 本試卷共九大題100分，計3頁。
2. 請直接於試題卷上作答。
3. 試卷請勿拆開，考試完畢請整份試卷繳回。

一、考慮球面 $S:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=1$ 及含有 z 軸的平面 α，設平面 α 與球面 S 相交的圓的面積爲 $\frac{\pi}{2}$，試求出平面 α 的方程式？(10%)

0

二、設坐標平面上有三個點 A，B(−5,0)，C(5,0) .點 A 的 y 坐標是大於 0 且三角形 ABC 滿足 (i),(ii)條件 (i) $\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin C}$

(ii) $25\sin(B-C)=7$

(1) 證明：三角形 ABC 是直角三角形並求 cosC = ？ (7%)

(2) 求三角形 ABC 的內心的坐標？ (8%)

0

三、設兩條曲線 $y=x^3-x$ 與 $y=x^2-a$ (其中 $a>0$) 皆通過一點 P，而且在 P 處具有公共的切線，求此兩條曲線所圍成區域的面積。(10%)

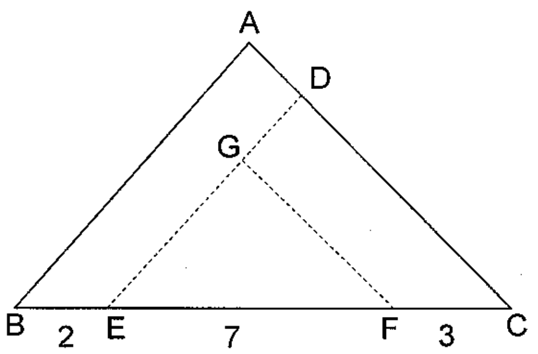
0

四、設a,b爲正實數，試證:$\frac{1}{2}\log_6(a^2+b^2)>\frac{1}{3}\log_6(a^3+b^3)$　(10%)

X

O

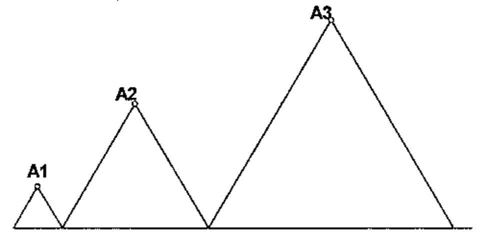
五、下圖爲一個三角形 ABC，其中$\overline{BE}=2,\overline{EF}=7,\overline{FC}=3$。今沿著虛線$\overline{DE}$、$\overline{FG}$用剪刀剪開，得到兩個梯形 ABED 與 CDGF，以及三角形 EFG，若其面積依次用a,b,c表示，試求$a:b:c$（化成簡單整數比）　(10%)



X

O

六、把邊長 2, 5, 8, ..., $3n$-1, ...的正三角形底邊放在同一條線上，且角頂靠角頂，如下圖。試證這些正三角形的頂點$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$落在同一圓錐曲線上。　(15%)



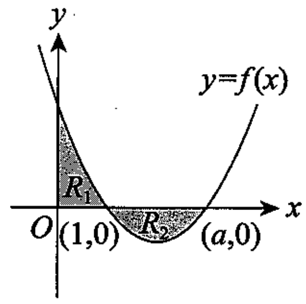
X

O

七、設二次函數 $f(x)=x^2+bx+c$ 的圖形通過點 $(1,0)$，$(a,0)$，其中 $a>1$，令 $f(x)$ 的圖形與 $y=0$，$x=0$ 及 $x=1$ 所圍成的區域為 R_1；$f(x)$ 的圖形與 $y=0$，$x=1$ 及 $x=a$ 所圍成的區域為 R_2，如圖所示．

(1)若 R_1 與 R_2 的面積相等，則 a 的值為何？(5%)

(2)若 R_2 面積是 R_1 面積的2倍，則 a 的值為何？(5%)



+0

八、已知圓 O 的圓心在原點，半徑為10，設甲、乙、丙三人從圓 O 上一點 $P(10,0)$ 依逆時針方向繞著此圓同時出發，若甲的速率是乙的2倍，丙的速率是甲的2倍，則當甲第一次走到點 $R(6,8)$ 時，乙走到的點 Q 及丙走到的點 S 之坐標分別為何？(10%)

+0

九、已知級數和公式如下：(1)$S(n,1)=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；(2)$S(n,2)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

(3)$S(n,3)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$。

試求出 $S(n,4)$ 的級數和公式：即 $S(n,4)=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=$ ？(10%)

+0