1 數列 **2014.3.29**

1.1 循環

1. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，若 $f(2)=2011$，則 $f(f(2))=$ ________。

答. $-\frac{1006}{1005}$。 (100文華高中)

解. 遞迴可得 $(f(2),f(3),f(4),f(5),f(6))=(2011,-\frac{2012}{2010},-\frac{1}{2011},\frac{2010}{2012},2011)$。
因此 $f(n)$ 四個一循環。$2011\equiv 3(\text{mod }4)$，所以 $f(2011)=f(3)=-\frac{1006}{1005}$。

評. 若 $x\neq 0$，且 $|x|\neq 1$，則 $f(x+4)=f(x)$。此循環技巧亦用於解函數方程，見100南港高工12。

2. 若數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=\frac{1}{7}, a_2=\frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n), n\geq 1$，則 $a_{2011}-a_{100}=$ ____。

答. $\frac{3}{7}$。 (100嘉義高中)

3. 函數 $f(n)$ 爲正整數 n 的各位數的數字平方和，如 $f(123)=1^2+2^2+3^2=14$，且定義：$f_1(n)=f(n)$, $f_{k+1}(n)=f(f_k(n))$，其中 k 爲任意正整數。則 $f_{2011}(2011)$ 之值爲 ________。 (100松山家商)

答. 145。

評. 本題的項數和循環節算是比較長的了!

4. 數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ 滿足 且 $a_0=1, b_0=1$ 且 $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}, b_n=-a_{n-1}+b_{n-1}$，$(n=1,2,3,\ldots)$，則 $a_{2008}\times b_{2008}$ 之值爲 ________。

答. 2^{2008}。 (97台南女中)

另解. 亦可用特徵值解 a_n, b_n 之一般式，見下節。

5. 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，求 $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2010}\right]$ 除以 7 的餘數。 (99南港高工)

答. 3。

提示. 令 $a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，則 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$。

評. 多看幾次，會很習慣補上另一項。

類題. 98清水高中計算1。

1.2 線性遞迴: 一般式、特徵值

6. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，若 $a_1 = 1$，且 $a_{n+1} = 3a_n - 1$，則 $a_n =$ ________。 (100松山家商2招)

答. $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$。

提示. 考慮 k 滿足 $k = 3k - 1$，則 $a_{n+1} - k = 3(a_n - k)$。。

類題. 此技巧可運用在二階的馬克夫鏈，見 100豐原高中10。

評. 此 k 即遞迴式的固定點。

7. (1) 遞迴數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_1 = 3$，且 $5a_{n+1} = 3a_n + 2$, $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$，則 a_n 之一般式爲 ________。(以 n 表示) (99中興高中)

(2) 遞迴關係 $a_n = 2a_{n-1} + 1$，求 a_n 的一般式。 (99中崙高中)

答. (1) $a_n = 1 + 2 \cdot (\frac{3}{5})^{n-1}$ (2) $a_n = 2^n(a_0 + 1) - 1$。

8. 設有二個首項皆爲 1 的數列 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$，且對於所有的自然數 n，$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n - 2b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n \end{cases}$ 恆成立，則 $a_n =$ ________。 (99安樂高中)

答. $2^{n+1} - 3^n$。

解. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，其特徵值爲 2, 3。令 $a_n = p \cdot 2^n + q \cdot 3^n$，以 $a_1 = 1, a_2 = -1$ 代入解得 $(p, q) = (2, -1)$。所以 $a_n = 2^{n+1} - 3^n$。

9. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n \geq 3)$，則 a_n 的一般式 $a_n =$ ________。

答. $\frac{2^n - (-1)^n}{3}$。 (99嘉義高工)

提示. 令 $b_n = a_{n-1}$。

評. 利用 b_n 改寫遞迴關係，但往後通常不寫 b_n，而直接寫特徵方程式。

應用. 有遞迴關係可求一般式，反之從一般式亦可寫回遞迴式，亦可與數學歸納法搭配使用，見 100板橋高中3。

10. (1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下：$a_1 = 2$、$a_2 = 3$、$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$，試求一般項 $a_n =$ ________ (以 n 表示)。 (97中和高中)

(2) 設數列 $\langle a_n \rangle$ 之 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, …, $a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}+a_n}{3}$ $(n = 1, 2, \ldots)$，則 $a_n =$ ________。 (100南港高工)

(3) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(1) $a_n =$ ________ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ________。 (100基隆高中)

(4) 遞迴關係 $a_n = 2a_{n-1} + 1$，求 a_n 的一般式。 (99中崙高中)

(5) $\langle a_n \rangle, a_1 = 1, a_2 = 1$，且 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ $(n \geq 1)$，試求 a_n 的一般式。

答. (1) $\frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{5}{6} \cdot 2^n$ (2) $\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \cdot (\frac{-1}{3})^n$ (3.1) $\frac{5}{3} + \frac{4}{3\cdot(-2)^n}$ (3.2) $\frac{5}{3}$
(4) $a_n = 2^n(a_0 + 1) - 1$ (5) $a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^{n-1}}{2}$。 (97大安高工)

11. 已知一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \forall n \in \mathbb{N}$，且 $a_2 = 7$, $a_6 = 127$，則 $a_{10} =$ ____。

答. 2047。 (99高雄市聯招)

12. 設 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$(a_{n+2})^3 = \frac{(a_{n+1})^4}{a_n}$，其中 n 爲任意正整數，則數列 $\langle a_n \rangle$ 之極限值爲 ________。 (100松山家商)

答. $2\sqrt{2}$。

提示. $b_n = \log a_n$。

13. 已知坐標上的點 $P_n(x_n, y_n)$，滿足 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (7x_n + 3y_n, 3x_n + 7y_n)$，$n$ 爲非負整數，其中 $(x_0, y_0) = (1 + a, 1 - a)$，$a \in \mathbb{R}$，且 $a \neq 0$。若 O 表坐標平面的原點，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} \log \overline{OP_n}$ 之值爲 ________。 (102台中女中)

答. 2。

14. 若 $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$，其中 x_n, y_n 爲整數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} =$ ________。

答. $\frac{1}{\sqrt{3}}$。 (100北港高中)

提示. $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{3} = (x_n + y_n\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$。

類題. 亦可用二項式定理解之，見 100成淵高中12。

15. 設 n 爲自然數，$(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$，$x_n$, y_n 均爲正整數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ 之值爲 ____。

答. $\sqrt{3}$。 (100彰化藝術暨田中高中、97家齊女中)

另解. $1=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=x_n^2-3y_n^2 \Rightarrow \frac{x_n^2}{y_n^2}\to 3$。

16. 一數列 $1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,-1,0,\ldots$ 求 a_n (用 $n,\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 表示)。

答. $a_n=\frac{\omega^{n+1}}{\omega^2-1}-\frac{\omega^{1-n}}{\omega^2-1}$。 (100南科實中)

提示. $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$。

17. $\star$ 設數列 $\langle a_n\rangle$ 遞迴定義式爲 $\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_n &= \frac{5a_{n-1}}{3a_{n-1}+4}, (n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)\end{cases}$，求 a_n (以 n 表示)。

答. $\frac{5^{n-1}}{3\cdot 5^{n-1}+(-2)\cdot 4^{n-1}}$。 (99鳳新高中)

提示. 令 $a_n=\frac{p_n}{q_n}\Rightarrow\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{5p_n}{3p_n+4q_n}$，取 $\begin{bmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_n\\ q_n\end{bmatrix}$。

評. 此稱分式線性遞迴，有公式可以寫一般式。

1.3 其它遞迴關係

18. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2n-2$ $(\forall n\geq 1)$，則數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般式爲 ________。 (99中壢高中2招)

答. $\frac{3^n+1}{2}-n$。

提示. 令 $b_n=a_n+n-\frac{1}{2}$。

19. 數列 a_n 中，$a_1=6$，且 $a_n-a_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{n}+n+1$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$，則這個數列的一般項 a_n 爲 ________。 (100中正高中2招)

答. n^2+3n+2。

解. 移項處理關係式得 $a_n=\frac{n+1}{n}a_{n-1}+n+1\Rightarrow\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_{n-1}}{n}+1$。
令 $b_n=\frac{a_n}{n+1}$，則 $b_n=b_{n-1}+1$ 且 $b_1=\frac{6}{2}=3\Rightarrow b_n=n+2\Rightarrow a_n=(n+2)(n+1)=n^2+3n+2$。

另解. 代幾項，猜測規律，再以數學歸納法證明之。

20. 設 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，且滿足 (97家齊女中)

(1) $f(1)=\frac{3}{2}$

(2) $\forall x\in\mathbb{N}, f(x+1)=(1+\frac{1}{x+1})\cdot f(x)+(1+\frac{x}{2})\cdot f(1)+x^2+2x$，

則 $f(100)=$ ________。

答. 507525。

21. $\star$ 若 $x_{n+1}=\frac{n+2}{n}x_n+\frac{1}{n}$，且 $x_1=0$，則 $x_n=$? (102復興高中)

答. $x_n=\frac{n^2+n}{4}-\frac{1}{2}$

提示. $\frac{x_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{x_n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$。

評. 此分母宛如天外飛來，而不像前兩題，是由式子整理得到另一個簡單遞迴數列。但保持前兩題的想法，即令 $y_n=r_nx_n$，去找 r_n，使得 y_n 有簡單的遞迴式。

22. 數列 $\{a_n\}, a_1=1, a_2=\frac{1}{3}$，若 $a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}=2a_na_{n+2}$，則 $a_n=$ ________。

答. $\frac{1}{2n-1}$。 (100中壢高中2招)

解. 同除 $a_na_{n+1}a_{n+2}$ 得 $\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{a_{n+1}}$，即前後項之調和平均等於中項。
所以 a_n 為調和級數 $\frac{1}{2n-1}$。

評. 陌生的數列，代個幾項容易發現 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$，不難猜測結果。

23. $\star$ 設 m 為正整數，$a_0, a_1, \ldots, a_m$ 為實數數列，其中 $a_0=37, a_1=72, a_m=0$，若對所有的 $k=1,2,\ldots,m-1$ 滿足 $a_{k+1}=a_{k-1}-\frac{3}{a_k}$，則 $m=$ ________。 (99清水高中)

答. 889。

提示. $a_ka_{k+1}=a_{k-1}a_k-3$，令 $b_k=a_{k-1}a_k$。

24. 函數 $f(93)=93$，每一正整數 n 使得 $f(n)+f(n+3)=n^2$ 恒成立，則 $f(30)=$ ____。

答. 4497。 (99彰化藝術、100慈濟聯招)

25. 設 $f(x)$ 表定義域為正整數的函數，且 $f(1)=999$，又對 $n\geq 2$ 的任意正整數 n，恆有 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots\ldots+f(n)=n^2f(n)$，則 $f(999)=$ ________。(100玉井工商)

答. $\frac{1}{500}$。

提示. $n^2f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(k)+f(n)$。

26. 已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+\frac{3^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, n\in\mathbb{N}$；則 $a_n=$ ________。 (100麗山高中)

答. $3^{n-1}\sqrt{n}$。

27. $\star$ $a_1=a_2=1, a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$，試證 $\langle a_n\rangle$ 每項均為整數。 (99高雄高中)

證. $a_3=\frac{1+2}{1}=3, a_4=\frac{9+2}{1}=11, a_5=\frac{121+2}{3}=41$，猜 $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$。
以數學歸納證之。$n=1,\,2$ 已驗；設 $n\le k,\ k\ge 2$，成立。

$$\begin{aligned}
a_{k+3}=\frac{a_{k+2}^2+2}{a_{k+1}}&=\frac{(4a_{k+1}-a_k)^2+2}{a_{k+1}}\\
&=\frac{16a_{k+1}^2-8a_{k+1}a_k+a_k^2+2}{a_{k+1}}\\
&=16a_{k+1}-8a_k+\frac{a_k^2+2}{a_{k+1}}\\
&=4a_{k+2}-4a_k+a_{k-1}\\
&=4a_{k+2}-a_{k+1}.
\end{aligned}$$

由數學歸納法得 $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$，又 $a_1=a_2=1$，故每項均爲整數。

評. 陌生的遞迴關係，先代幾項看看就對了。

另證. $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}\Rightarrow a_na_{n+2}=a_{n+1}^2+2\Rightarrow a_{n+1}a_{n+3}-a_na_{n+2}=a_{n+2}^2-a_{n+1}^2\Rightarrow a_{n+1}(a_{n+3}+a_{n+1})=a_{n+2}(a_{n+2}+a_n)\Rightarrow\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_{n+3}}{a_{n+2}}$，得 $4=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_2+a_4}{a_3}=\ldots=\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}\Rightarrow 4a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\Rightarrow a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$，又 $a_1=a_2=1$，故每項均爲整數。

28. 數列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2, a_{n+1}>a_n$，且 $a_{n+1}^2+a_n^2+4=2a_{n+1}\cdot a_n+4a_{n+1}+4a_n$，則一般項 $a_n=$ ________。 (98師大附中)

答. $2n^2$。

提示. 配方 $(a_{n+1}-a_n-2)^2=8a_n$。

29. 有一數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1, a_{n+1}>a_n$，且 $(a_{n+1})^2+(a_n)^2+1=2(a_{n+1}a_n+a_{n+1}+a_n)$，$S_n$ 爲前 n 項和，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}$。 (98嘉義女中)

答. $\frac{1}{3}$。

1.4 其它

30. 一等差級數 $S_{10}=a, S_{20}=4a$，則 $S_{50}=$ ________。 (100卓蘭實中)

答. $25a$。

解. 令 $S_0=0, A_n=S_{10n}-S_{10n-10}$。則 $A_n=\{a,3a,5a,7a,9a,\ldots\}$ 成等差。
$S_{50}=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=25a$。

31. 給定數列 $\langle a_n\rangle$ (稱爲原數列): $a_1=9,\ a_2=7,\ a_3=0,\ a_4=7,\ a_5=2,\ a_6=6$，今按下列規則依序產生後續數列：將相鄰兩項的差(前一項減後一項)增列在這兩項之間。

得：〈數列1〉：a_1, (a_1-a_2), a_2, (a_2-a_3), a_3, (a_3-a_4), a_4, (a_4-a_5), a_5, (a_5-a_6), a_6。
然後再對〈數列1〉作相同的操作得〈數列2〉，以此類推，即：
原數列：$9, 7, 0, 7, 2, 6$
〈數列1〉：$9, 2, 7, 7, 0, -7, 7, 5, 2, -4, 6$
……………………………………………………………
試問〈數列20〉的級數和爲 ________。 (99萬芳高中代理)

答. 91。

32. 在一邊長爲 n 的正方形方格中，以向內螺旋的方式排列正整數，如下所示，爲 $n=5$ 的排列結果。若 $n=27$，試求左上至右下的對角線上所有元素的和。 (99家齊女中)

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

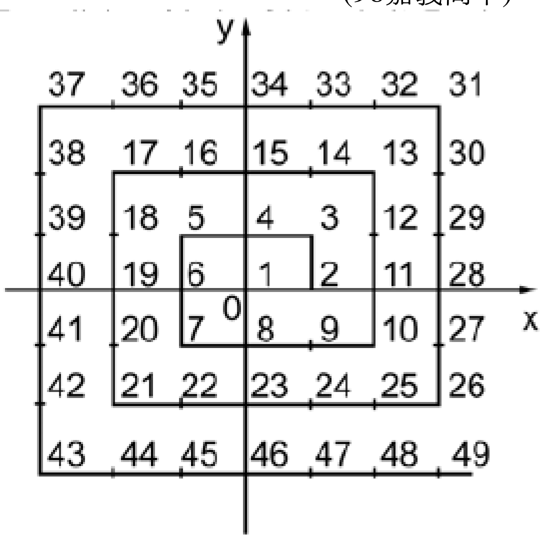
答. 12767。

解. 不妨反向排序，將 1 放在正中間，如此一來 n 每加 2，只是外層多一圈，內層不變。而且與原表格關係是同一位置的和爲 n^2+1。
反向排易得 $1, 5, 9, 17, 25, 37, 49, 65, 81, \ldots$，其規則奇數項 n^2；偶數項 n^2+1。

當 $n=27$，其和爲 $\sum_{k=1}^{27} k^2+13=6943$。故所求$=27\cdot(27^2+1)-6943=12767$。

評. 直接算也沒什麼不行，只是要花點工夫觀察。

33. 將自然數按(圖三)中的規則排列，每個自然數都對應一個坐標，如數 3 對應的坐標是 $(1,1)$。請問數 2009 對應的坐標爲 ________。 (98嘉義高中)



(圖三)

答. $(6, -22)$。

解. $44^2=1936$, $45^2=2025$, $2009=2025-16$。因此坐標爲 $(22-16, -22)=(6, -22)$。

34. $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}=$ ________。 (100松山工農)

答. $\sqrt{2}$。

解. 設 $n, A, B > 0$, 則 $\left|\frac{1}{n+A} - \frac{1}{n+B}\right| \le \frac{1}{n^2}|A-B|$。由此不等式可得 $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}$ 收斂。令其極限爲 a，則 $\frac{1}{a+2} = a$，解得 $a = \sqrt{2} - 1$(負不合)，所以所求 $= \sqrt{2}$。

評. 填充題的話，直接算答案就好了，平常不妨多思考。

35. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 定義爲：$a_1 = 1$，且當 $n \ge 2$ 時，$a_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} + 1 & (n \text{ is even;}) \\ \frac{1}{a_{n-1}} & (n \text{ is odd.}) \end{cases}$，已知 $a_n = \frac{30}{11}$，則 $n =$ ________。 (98台北縣聯招)

答. 236。

解. $\frac{30}{11} = 2 + \frac{1}{\frac{8}{11}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{3}{8}} = 2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{3}}} = 2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$。

$a_2 = 2$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_6 = 1 + \dfrac{1}{2}$, $a_7 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$, $a_{28} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$, $a_{29} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$, $a_{58} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$, $a_{59} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$, $a_{236} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$。

36. 正整數的遞增數列，$a_1, a_2, a_3, \dots$ 符合 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，其中 $n \ge 1$，若 $a_7 = 120$，則 $a_8 =$ ________。 (99彰化藝術)

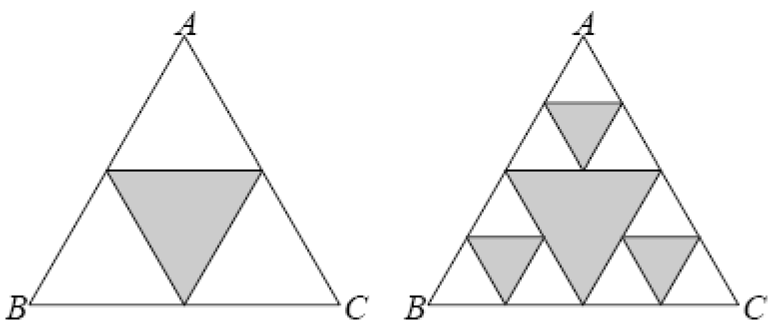
答. 194。

解. $a_7 = 5a_1 + 8a_2 = 120$，其正數解僅有 $(a_1, a_2) = (8, 10), (16, 5)$ 但僅有 $(a_1, a_2) = (8, 10)$ 符合遞增。所以 $a_8 = 8a_1 + 13a_2 = 194$。

37. 同上，求 a_{10}。 (99高雄高中)

答. 508。

38. 設 $\triangle ABC$ 爲邊長 1 的正三角形，取三邊中點並兩兩連線，將 $\triangle ABC$ 的面積四等分，得 到三個直立的正三角形，和一個倒立的正三角形(如附圖)，將倒立的正三角形移走。其次將剩下的三個直立的正三角形，依照相同的方法分割，並移去其中的倒立正三角形. . . 。設第 n 次移走倒立正三角形後，被挖掉三角形之面積爲 a_n。試求：(1) a_n 之遞迴式。(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 之值。 (99彰化女中)



答. (1) $a_{n+1}=\frac{3}{4}(a_n-a_{n-1})+a_n$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$。

註. (1) 學校公布之答案爲 $a_n=a_{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3^{n-1}}{2^{2n}}$，其用了邊長爲 1 的條件去計算第 n 次移走的每個小角形的大小。

39. $\star$ 若 $\begin{cases} ax+by &=3\\ ax^2+by^2 &=7\\ ax^3+by^3 &=16\\ ax^4+by^4 &=42\end{cases}$，則 $ax^5+by^5=$ ________。 (99鳳新高中)

答. 20。

提示. $ax^{n+2}+by^{n+2}=(ax^{n+1}+by^{n+1})(x+y)-xy(ax^n+by^n)$。

另解. 由提示知 $\begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2}\\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3}\\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} xy\\ -(x+y)\\ 1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2}\\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3}\\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 7 & 16\\ 7 & 16 & 42\\ 16 & 42 & ax^5+by^5\end{vmatrix}=0$。

類題. 類似遞迴關係見 99中正預校計算1。

40. 在數列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，且對任意大於 1 的正整數 n，點 $(\sqrt{a_n},\sqrt{a_{n-1}})$ 在直線 $x-y-\sqrt{3}=0$ 上。若前 n 項和爲 S_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2n+1)^3}=$ ________。 (100桃園高中)

答. $\frac{1}{8}$。

41. 數列 $\langle a_n\rangle$ 之前 n 項的和 $S_n=2^n(2n+1)$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{a_n}=$ ________。 (98清水高中)

答. $\frac{11}{6}$。

提示. $n\geq 2, a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}(2n+3)$。

42. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和 $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}2^{n+1}+\frac{2}{3}, n=1,2,3,\ldots$ (97竹北高中)

(1) 求首項 a_1。

(2) 求一般項 a_n。

(3) $\star$ 設 $T_n=\frac{2^n}{S_n}, n=1,2,3,\ldots$，證明: $\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$。

答. (1) 2 (2) 4^n-2^n。

43. 某一函數 f 對於非負整數 n,k 定義如下: $\begin{cases} f(0,n)=n+1 \\ f(k,0)=f(k-1,1) \\ f(k+1,n+1)=f(k,f(k+1,n)) \end{cases}$，試計算 $f(2,3)$ 之值? (97潮州高中)

答. 9。

44. 數列 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\ldots$，試求它的前 99 項之和。 (99大安高工)

答. $\frac{479}{10}$。

45. 設 $[x]$ 爲表示小於或等於 x 的最大整數，令 $b_n=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]$，則 $b_{2008}-b_{2007}=$ ________。 (97中和高中)

答. 8。

提示. 考慮 $c_k=\left[\frac{2008}{k}\right]-\left[\frac{2007}{k}\right]$。

46. $a_1=\frac{1}{3}, a_{n+1}=2a_n-[a_n]$，求 $a_{2012}+a_{2013}$ 的值。 (102武陵高中)

答. 2012。

提示. $a_n-[a_n]=\begin{cases} \frac{1}{3} & ,n\text{is odd} \\ \frac{2}{3} & ,n\text{is even} \end{cases}$。

2 級數

2.1 冪級數

47. $\log_3\left[(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)+\frac{1}{2}\right]+\log_3 2$ 的值爲 ________。

答. 128。 (100永春高中代理、100麗山高中)

解. 乘開可得等比級數，類似乘積見 99桃園現職聯招5。

48. 自然數中，若含有比 5 大的質因數，則把他去掉，剩下的自然數由小到大排成一數列 $\langle b_n\rangle=\langle 1,2,3,4,5,6,8,\ldots\rangle$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=$ ________。 (100北一女中)

答. $\frac{15}{4}$。

解. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots)(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots)(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\ldots)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{15}{4}$。

49. 設 ω 爲 $x^3=1$ 之一虛根，若無窮級數 $1+\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{4}\omega^2+\ldots+\frac{1}{2^n}\omega^n+\ldots$ 之和爲 $\alpha+\beta\omega$，其中 α,β 皆爲實數，則數對 $(\alpha,\beta)=$ ________。 (100金門農工)

答. $(\frac{6}{7},\frac{2}{7})$

解. $S=\frac{1}{1-\frac{\omega}{2}}=\frac{2(4+2\omega+\omega^2)}{(2-\omega)(4+2\omega+\omega^2)}=\frac{8+4\omega+2\omega^2}{8-1}=\frac{8+4\omega-2(1+\omega)}{7}=\frac{6}{7}+\frac{2}{7}\omega$。

評. 公比 r 是複數也沒關係，只要 $|r|<1$

50. 設 n,k 都是正整數，對形如 $\frac{k}{6^n}$ 的分數而言，令不大於 1 的最簡分數之總和爲 T_n，求 $T_n=$ ________。 (97高雄市聯招)

答. 6^{n-1}。

51. 若 $\omega=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $|\omega+2\omega^2+3\omega^3+\ldots+9\omega^9|^{-1}=$ ________。

答. $\frac{2}{9}\sin 20^\circ$。 (100全國聯招)

52. 令 $T=\sum\limits_{n=1}^{30}\frac{n}{3^n}$，將 $\frac{3}{4}-T$ 以小數表示，在小數點後第 k 位後出現的首個非 0 數字爲 a，求 k,a。 (99屏東女中)

答. $(k,a)=(14,7)$

53. $A=\{n\mid 1\le n\le 2010\}$，$A$ 的所有子集的最大元素的算術平均數爲 S，則最接近 S 的整數爲 ________。 (99建中市內)

答. 2009。

評. 那空集合最大元素是多少？

54. 將 n^2 個正數排成一個 $n\times n$ 階方陣，其中每一列的數成等差，每一行成等比，且所有的公比皆相等。已知 $a_{24}=1, a_{42}=\frac{1}{8}, a_{43}=\frac{3}{16}, S=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$，若 $S+\frac{1}{2^{10}}$ 爲一正整數，則 n 之值爲 ________。 (99建國高中)

答. 14。

55. $a_n=\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{2^3}+\ldots+\frac{\sin nx}{2^n}$，求 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (2) 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n, 0\le x\le 2\pi$，求 $f(x)$ 的範圍。 (100豐原高中)

答. (1) $\frac{2\sin x}{5-4\cos x}$ (2) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$。

提示. 考慮 $c_n=\frac{e^{ix}}{2}+(\frac{e^{ix}}{2})^2+(\frac{e^{ix}}{2})^3+\ldots+(\frac{e^{ix}}{2})^n$。

2.2 $\sum i^k$

56. $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,\ldots$，若前 n 項和爲 S_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}}$。 (100南科實中)

答. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

解. 先考慮 $n=\frac{k(k+1)}{2}$ 之情況，其它情況可以相鄰之 k 夾擠之。

$$S_n=\sum_{m=1}^{k} m^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},\ \lim_{k\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{k(k+1)\sqrt{k(k+1)}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}。$$

57. 設 $\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(n)x^k$，其中 $n\in\mathbb{N}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5a_{n-2}(n)}{n^2\cdot a_{n-1}(n)}=$ ________。

註. 原題記號爲 a_k, a_{n-2}, a_{n-1} 有誤，a_i 非常數，故改爲 n 的函數，$a_i(n)$。

答. $\frac{5}{4}$。 (100北港高中)

解. $a_{n-1}(n)=\sum\limits_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$,

$$a_{n-2}(n)=\sum_{1\le i<j\le n} ij=\frac{\sum\sum ij-\sum i^2}{2}=\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2}=O(\frac{n^4}{8})。$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_{n-2}(n)}{n^2a_{n-1}(n)}=\frac{5/8}{1/2}=\frac{5}{4}。$$

評. 算個大概就好了，反正誤差會收斂到 0。

58. 求 $(2x+1)(4x+1)(6x+1)\cdots(18x+1)(20x+1)$，展開式中 x^2 項的係數。

答. 5280。 (100桃園新進聯招)

解. $\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j>i}^{10}(2i)(2j)=4\cdot\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=1}^{10} ij-\sum\limits_{i=1}^{10} i^2\right)=2\cdot(55^2-385)=5280$。

類題. 100成淵高中6。

59. $\star$ 將十次多項式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)$ 展開後得 $x^{10}+55x^9+a_8x^8+a_7x^7+\ldots+10!$，若 $a_8=55M,\ a_7=55^2N$，其中 M、N 爲正整數，則數對 $(M,N)=$ ________。 (101文華高中)

答. $(24,6)$。

2.3 裂項相消

60. 設 $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$，則 $\sum\limits_{n=1}^{99}a_n=$ ________。 (100麗山高中2招、97台中高工)

答. $\frac{9}{10}$。

評. 通常看不出來要做什麼，可能就是裂項相消了!

61. 求值 $\sum\limits_{n=1}^{49}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$。(將答案化爲最簡形式) (100華江高中2招)

答. $5+3\sqrt{2}$。

提示. $n+\sqrt{n^2-1}=\frac{1}{2}(n+1+2\sqrt{(n+1)(n-1)}+n-1)=\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2$。

62. 求 $\sum\limits_{n=1}^{99}\frac{2n+1}{1^3+2^3+\ldots+n^3}$。 (100苑裡高中)

答. $\frac{9999}{2500}$。

63. $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2009^2}+\frac{1}{2010^2}}$ 的值爲 ________。

答. $2009\frac{2009}{2010}$。 (99台北縣聯招)

提示. $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\left[1+\frac{1}{k(k+1)}\right]^2$。

64. 數列 $\frac{8\cdot1}{1^2\cdot3^2}, \frac{8\cdot2}{3^2\cdot5^2}, \frac{8\cdot3}{5^2\cdot7^2}, \ldots, \frac{8\cdot n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}, \ldots$，若 S_n 表前 n 項之和，且 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ (1) 求 S_n 及 S。(2)求使 $S-S_n<\frac{1}{10000}$ 成立的最小自然數 n 的值。 (100嘉義女中)

答. (1) $S_n=1-\frac{1}{(2n+1)^2}, S=1$ (2) 50。

65. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=$ ________。 (99中壢家商)

答. $\frac{1}{4}$。

66. 求 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)(k+5)}$ 之值。 (100育成高中代理)

答. $\frac{22}{225}$。

另解. 注意 $\frac{1}{k(k+2)(k+5)} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{k} - \frac{1}{6}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{15}\frac{1}{k+5}$，且 $\frac{1}{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = 0$。
所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)(k+5)} = \frac{1}{10}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}) + (\frac{1}{10}-\frac{1}{6})\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}) = \frac{22}{225}$。

評. 這招是多裂項，但本題，亦可用兩次裂兩項亦可。

67. $\star$ 設 $\langle a_n\rangle$ 表費氏數列，$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$，令 $S_n = \frac{1}{a_2a_4} + \frac{1}{a_3a_5} + \frac{1}{a_4a_6} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+2}}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$。 (97台南二中)

答. $\frac{1}{2}$。

解. $\frac{1}{a_na_{n+2}} = \frac{1}{a_{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}}\right) = \frac{1}{a_na_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$。所以 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_ka_{k+2}} = \frac{1}{a_2a_3} = \frac{1}{2}$。

評. 級數求和的處理，還有其它方法，但通常是該級數有一些明顯的特徵。當看不出個所以然時，或許就是裂項相消的時候了。

2.4 分解相消

68. 設 $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$，則 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{1000} =$ ________。 (100苑裡高中)

答. $\frac{1001}{501}$。

69. 試求 $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\cdots(1-\frac{1}{100^2})$。 (100全國聯招)

答. $\frac{101}{200}$。

70. 求乘積 $\sqrt{1+\frac{2}{1}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{4}}\cdots\sqrt{1+\frac{2}{286}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{287}}$。 (100華江高中2招)

答. 204。

71. $\star$ $\frac{3^4+2^6}{7^4+2^6}\times\frac{11^4+2^6}{15^4+2^6}\times\frac{19^4+2^6}{23^4+2^6}\times\frac{27^4+2^6}{31^4+2^6}\times\frac{35^4+2^6}{39^4+2^6}\times\frac{43^4+2^6}{47^4+2^6} =$ ________。 (100中科實中)

答. $\frac{1}{481}$。

提示. 注意 $x^4 + 2^6 = [(x-2)^2+4]\,[(x+2)^2+4]$。

評. 有加法和乘法相消的經驗，可聯想分解分子分母互消。至於這個因式分解，是從解 $x^4 + 2^6 = 0$ 的四個根，兩兩共軛湊成的。

72. 計算 $\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$。 (100卓蘭實中)

答. 373。

73. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3+1}{2^3-1}\times\frac{3^3+1}{3^3-1}\times\frac{4^3+1}{4^3-1}\times\cdots\times\frac{n^3+1}{n^3-1}$ 之值爲 ________。 (102北一女中)

答. $\frac{3}{2}$。

74. $\star$ 證明: $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$。 (98高雄市聯招)

證. 補上奇數分母項可得 $\prod_{n=2}^{1999}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{1999}$，及 $(\prod_{n=1}^{999}\frac{2n-1}{2n})^2 < (\prod_{n=1}^{999}\frac{2n-1}{2n})(\prod_{n=1}^{999}\frac{2n}{2n+1}) = \prod_{n=2}^{1999}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{1999}$。所以 $\prod_{n=1}^{999}\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{1999}} < \frac{1}{44}$。

註. Wallis product $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$。

2.5 逐項微分、積分

75. 求級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和。 (100師大附中)

答. $\frac{22}{27}$。

解. $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots \Rightarrow x^2(\frac{1}{1-x})'' = 2x^2+6x^3+12x^4+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n$。

所以 $\frac{1}{1-x}+\frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$。$x$ 以 $(-\frac{1}{2})$ 代入得 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^2-n+1)}{2^n} = \frac{22}{27}$。

評. 本題亦可以等比級的手法數二次，計算得之，寸絲稱其爲二階差比級數。

76. 滿足 $\sum_{k=1}^{n}\left(kC_k^n\cdot 3^k\right) \geq 390000$ 的最小正整數 n 之値爲 ________。 (100華江高中)

答. 8。

77. $1^2\cdot C_1^{10}(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^9+2^2\cdot C_2^{10}(\frac{2}{6})(\frac{5}{6})^8+3^2\cdot C_3^{10}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7+\ldots+10^2\cdot C_{10}^{10}(\frac{1}{6})^{10} =$ ________。

答. $\frac{25}{6}$。 (98彰化女中)

78. 若 $(x-1)(x+1)^{30} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{31}x^{31}$，試求 $a_0+a_1+2a_2+3a_3+\ldots+31a_{31}$。 (100麗山高中)

答. $2^{30}-1$。

2.6 富比尼定理

79. 求: $1\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)$。

$$+5\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)+\ldots+197\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)+199\times\frac{1}{100}$$

答. 5050。 (100麗山高中2招)

80. $y=[x]$ 表高斯函數，求 $\sum_{k=1}^{40}\left[10^{\frac{k}{40}}\right]$。 (101文華高中)

答. 141。

解. 令 $a_k=\left[10^{\frac{k}{40}}\right]$，則 $\sum_{k=1}^{40}\left[10^{\frac{k}{40}}\right]=\sum_{j=1}^{10}\#\{a_k\geq j\}$。即下表最後一列和 141。

$\log 1$	$\log 2$	$\log 3$	$\log 4$	$\log 5$	$\log 6$	$\log 7$	$\log 8$	$\log 9$	$\log 10$
0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1
0	12	19	24	27	31	33	36	38	$40-1$
40	28	21	16	13	9	7	4	2	1

註. 第三列是 $\#\{a_k<j\}$。

81. $\sum_{k=1}^{2013}\left[\sqrt[5]{\frac{2013}{k}}\right]=$ ________。([ ] 爲高斯符號) (102建國中學)

答. 2084。

82. 設 $F(n)$ 表示整數 n 之各位數字中偶數的和，例如：$f(1234)=2+4=6$，試問 $F(1)+F(2)+\ldots+F(1000)=$ ________。 (98慈濟聯招)

答. 6000。

2.7 其它

83. 設 $k\in\mathbb{N}$，直線 $y=kx+k-1$、直線 $y=(k+1)x+k$ 及 x 軸所圍成的三角形面積爲 S_k，則 $\sum_{k=1}^{2011}S_k=$ ________。 (100中正高中)

答. $\frac{2011}{4024}$。

84. n 是自然數，O 爲原點，平面 π : $x+ny+(n+2)z=1$ 與三坐標軸相交於點 A_n, B_n, C_n，若 V_n 表四面體 $O-A_nB_nC_n$ 的體積，求 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$。 (99彰化女中)

答. $\frac{1}{8}$。

85. 已知 $n\in\mathbb{N}$，設方程式 $x^2+(\frac{n}{2}+1)x+(n^2-2)=0$ 的兩根爲 α_n, β_n，則 $\frac{1}{(\alpha_3+2)(\beta_3+2)}+\frac{1}{(\alpha_4+2)(\beta_4+2)}+\ldots+\frac{1}{(\alpha_{2011}+2)(\beta_{2011}+2)}=$ ________。 (100中正高中2招)

答. $\frac{2009}{4022}$。

86. 若 $a_n=\begin{vmatrix} n & n+1 & 0 \\ n+2 & n+1 & n+2 \\ n+2 & 0 & n+2 \end{vmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$，求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$。 (98慈濟聯招)

答. $\frac{1}{4}$。

87. $[\,]$ 表高斯符號。 (99高雄高中)

(1) 求 $\sum\limits_{k=2}^{100}\left[\frac{k^4}{k^2-1}\right]$。

(2) 求 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k^4}{k^2-1}-\left[\frac{k^4}{k^2-1}\right]\right)$。

答. (1) 338448 (2) $\frac{3}{4}$。

提示. $\frac{k^4}{k^2-1}=\frac{k^4-1}{k^2-1}+\frac{1}{k^2-1}$。

88. $\star$ 對任意正整數 $n\geq 4$，令 a_n 表示 n 進位的循環小數 $(0.\overline{133})_n$，將 a_4、a_5、$\ldots a_{99}$ 等數的乘積寫成 $\frac{m}{p!}$ 的形式，其中 m, p 爲正整數，且 p 盡可能小，則 m 之值爲何？

答. 962。 (100松山家商)

提示. $a_n=\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}}=\frac{(n+1)(n+2)+1}{(n-1)[n(n+1)+1]}$。

89. $a_1=1^2, a_2=1^2-2^2, a_3=1^2-2^2+3^2, a_4=1^2-2^2+3^2-4^2, \ldots$ 求 a_n，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{a_n}$。

答. $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{a_n}=2$。 (100豐原高中)

90. 一串數，1, 4, 7, 10, $\ldots$, 2008, 2011的規律是：第一個數是 1，以後每一個數等於它前面的一個數加 3，直到 2011 爲止。將所有這些數相乘，試求所得數的尾部零的個數有多少個。(例如：20110608000 尾部零的個數有 3 個) (100中正高中)

答. 167。

91. 我們定義 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$，例如 $5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$。試問使得 $n!$ 的最後 90 位數字全是 0 的最小正整數是多少？(例如 5! 最後只有 1 位數字是 0) (97潮州高中)

答. 370。

解. $\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x}{25}\right]+\left[\frac{x}{125}\right]\leq\frac{31}{125}x$, $90\leq\frac{31}{125}x\Rightarrow x\geq 360$。$\left[\frac{360}{5}\right]+\left[\frac{360}{25}\right]+\left[\frac{360}{125}\right]=88$，而 365 非 25 之倍數，故最小正整數 n 爲 370。

92. 若 P_{1340}^{2010} 必爲 3^k 的倍數，則 k 的最大值爲 ________。(其中 $P_m^n=\frac{n!}{(n-m)!}$，n, m 均爲自然數。) (100中正高中2招)

答. 670。

93. $\star$ 設 $2010! = 5^n \times a$，其中 $n, a \in \mathbb{N}$且 a 不是 5 的倍數，設 a 被 5 除所得的餘數爲 r，則數對 $(n, r) =$ ________。 (99高雄市聯招)

答. $(501, 3)$。

解. 連除法可得 $2010 \to 402 \to 80 \to 16 \to 3 \Rightarrow n = 402 + 80 + 16 + 3 = 501$。

對於正整數 n，定義 $p_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) / \left(\prod_{k=1}^{[\frac{n}{5}]} 5k\right)$，即將 $n!$ 中的 5 倍數去掉。

$a = \frac{2010!}{5^{402} \cdot 5^{80} \cdot 5^{16} \cdot 5^3} = p_{2010} \cdot \frac{402!}{5^{80} \cdot 5^{16} \cdot 5^3} = p_{2010} p_{402} p_{80} p_{16} p_3$。

注意 $4! \equiv 24 \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow p_{5n} \equiv (-1)^n \pmod 5$。

因此 $a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \equiv 3 \pmod 5$。

94. $\star$ 求組合數 C^{2008}_{1234} 除以 7 的餘數。 (97台中一中)

答. 6。

95. (1) $\sum_{n_2=0}^{3} \sum_{n_1=0}^{n_2} \sum_{n_0=0}^{n_1} 1 =$ ________。

(2) $\star$ $\sum_{n_{10}=0}^{3} \sum_{n_9=0}^{n_{10}} \cdots \sum_{n_2=0}^{n_3} \sum_{n_1=0}^{n_2} \sum_{n_0=0}^{n_1} 1 =$ ________。 (98師大附中)

答. (1) 20 (2) 364。

解. 定義 $x^{\bar{n}} = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdots (x+n-1), n \in \mathbb{N}$； $x^{\bar{0}} \equiv 1$。

則 $x^{\bar{n}} - (x-1)^{\bar{n}} = n x^{\overline{n-1}} \Rightarrow x^{\overline{n-1}} = \frac{1}{n}\left(x^{\bar{n}} - (x-1)^{\bar{n}}\right)$。

$\Rightarrow \sum_{x=0}^{y} (x+1)^{\overline{n-1}} = \frac{1}{n}\left((y+1)^{\bar{n}} - 0^{\bar{n}}\right) = \frac{1}{n}(y+1)^{\bar{n}}$。因此有

(1) $\sum_{n_2=0}^{3} \sum_{n_1=0}^{n_2} \sum_{n_0=0}^{n_1} 1 = \sum_{n_2=0}^{3} \sum_{n_1=0}^{n_2} (n_1+1)^{\bar{1}} = \frac{1}{6}(3+1)^{\bar{3}} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$。

(2) $\sum_{n_{10}=0}^{3} \sum_{n_9=0}^{n_{10}} \cdots \sum_{n_2=0}^{n_3} \sum_{n_1=0}^{n_2} \sum_{n_0=0}^{n_1} 1 = \frac{1}{11!}(3+1)^{\overline{11}} = \frac{4 \cdot 5 \cdots 14}{11!} = 364$。

96. 求 $1 \cdot 1 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) + (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) + \ldots + (1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \ldots + n \cdot 1)$。

答. $\frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3)$。 (98新港藝術)

97. 設 $(2 + x + x^2)^{1004} = \sum_{n=0}^{2008} A_n x^n$，其中 A_n 爲實數，則 $\sum_{k=0}^{1004} (-1)^k A_{2k} =$ ________。

答. -2^{502}。 (97台南女中)

解. 代入 i，取實部：$(2 + i - 1)^{1004} = 2^{502}(\cos 251\pi + i \sin 251\pi) = -2^{502}$。

3 方程式

3.1 代數方程

98. 方程式 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$ 所有實根的乘積爲 ________。(99中壢家商)

答. 20。

提示. 令 $t=\sqrt{x^2+18x+45}$。

99. 解 $x^4+7x^3+14x^2+7x+1=0$。 (99中崙高中)

答. $-2\pm\sqrt{3}, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$。

解. $x^4+7x^3+14x+7x+1=0 \Rightarrow x\neq 0, x^2+7x+14+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$。
令 $y=x+\frac{1}{x}$，則 $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$。所以 $y^2+7y+12=0$。
解得 $y=-3$ 或 -4，再解得$x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$。

100. 方程式 $x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ 的所有實數根之和爲?

答. 3。 (101瑞芳高工、101台師大數學系)

101. $\star$ 若 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 有實數解，則 a^2+b^2 的最小值爲 ________。

答. $\frac{4}{5}$。 (102建國中學、99台中區)

解. 令 $t=x+\frac{1}{x}$。若 x 爲原方程式之實根，則 $|t|\geq 2$ 且 $t^2+at+b-2=0$；反之若 $|t|\geq 2$ 且 $t^2+at+b-2=0$，則 $x^2-tx+1=0$ 有兩實根且其根亦爲 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 之根。
故原方程式有實根之等價條件爲 $t^2+at+b-2=0$ 有一實根之絕對值不小於 2。
若 t 固定，a, b 滿足 $ta+b+t^2-2=0$ 爲一直線，其 a^2+b^2 之最小值爲 $\left(\frac{t^2-2}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2$。
令 $s=\sqrt{t^2+1}\geq\sqrt{5}$，則 $\frac{t^2-2}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{s^2-3}{s}=s-\frac{3}{s}$，微分得 $1+\frac{3}{s^2}$。
因此當 $s=\sqrt{5}, t=\pm 2$ 時 $\frac{t^2-2}{\sqrt{t^2+1}}$ 有最小值 $\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow$ 所求 $=\frac{4}{5}$。

102. 設 $X=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 滿足 $X^4+\frac{8}{3}X^3+X^2+\frac{8}{3}X+I=0$，令 $Y=X+X^{-1}$，且 Y 滿足 $Y^2+pY+qI=0$，求 $p, q, \cos\theta$ 之值。 (97台中一中)

答. $p=\frac{8}{3}, q=-1, \cos\theta=\frac{1}{6}$。

評. $x=\cos\theta+i\sin\theta$。

103. 解 $x^4-22x^2-48x-23=0$。 (97大里高中)

答. $-\sqrt{6}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}},\ \sqrt{6}\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}$。

解. 原式 $\Rightarrow (x^2+a)^2=(22x^2+48x+23)+(2ax^2+a^2)$，對任意 $a\in\mathbb{R}$。
取 a 使得右式亦爲完全平方數，即 a 滿足 $48^2-4(22+2a)(23+a^2)=0$。
因此可取之 a 有 $-7,-5,1$。任取其一，如 $a=1$，則
$(x^2+1)^2=24(x+1)^2\Rightarrow x^2+2\sqrt{6}x+(1+2\sqrt{6})=0$ 或 $x^2-2\sqrt{6}x+(1-2\sqrt{6})=0$，由公式解可得

$$x=\frac{-2\sqrt{6}\pm\sqrt{20-8\sqrt{6}}}{2}=-\sqrt{6}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}},\ \sqrt{6}\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}.$$

104. 解 $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$。 (99鳳新高中)

答. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

105. $\star$ 求解方程式 $\frac{4x}{x^2+2x+4}-\frac{3x}{x^2-3x+4}=-\frac{7}{3}$。 (100台南二中)

答. 2 或 $\frac{-12\pm2\sqrt{13}i}{7}$。

提示. 分子分母同除 x，令 $y=x+\frac{4}{x}$。

106. 方程式 $(x+7)^{\frac{1}{3}}-(x-7)^{\frac{1}{3}}=2$，則得實根中較大者爲 ________。 (99嘉義高工)

答. $x=5\sqrt{2}$。

解. 令 $a=(x+7)^{\frac{1}{3}}, b=(x-7)^{\frac{1}{3}}$，則 $a-b=2, a^3-b^3=14$。
解聯立得 $b^2+2b-1=0\Rightarrow b=-1\pm\sqrt{2}$ (取大) $\Rightarrow x=5\sqrt{2}$。

107. 設 $x>0$，求解方程式 $\sqrt[3]{x+18}-\sqrt[3]{x-18}=3$。 (100文華高中)

答. $5\sqrt{13}$。

108. 解方程式: $\sqrt[3]{(10+x)^2}+\sqrt[3]{(3+x)^2}=\sqrt[3]{(10+x)(-3-x)}+7$ 得 $x=$ ________。

答. -11 或 -2。 (97中和高中)

109. 解方程式 $\sqrt[4]{16-x}+\sqrt[4]{1+x}=3$ 之實數解。 (97台中一中)

答. 0 或 15。

110. $\star$ 設 a,b,c 均爲實數，試推導出 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的解。 (100松山工農)

解. 令 $x=y-\frac{a}{3}$，可得 $y^3+py+q=0$, 再令 $y=t-\frac{p}{3t}$，可得 $t^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$。
令 $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\Rightarrow y=u+v$。

評. 此即卡丹公式，沒事的可以背下 p, q 的結果。
另外判別式 $-27q^2-4p^3$ 之正負，決定是否有虛根。

111. 證明方程式 $x^3+3x-1=0$ 恰有一實根，並解此實根。(若求近似根，請精確到小數點以下第 4 位。) (98內湖高工)

答. $\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$。

112. 化簡 $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$。 (99松山高中)

答. 2。

解. 令 $x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$，則 $x^3=20+3\sqrt[3]{100-108}x=20-6x \Rightarrow$ $x^3+6x-20=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+10)=0$。
有唯一實根 $x=2$。故 $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=2$。

另解. 卡丹公式，比較位置，得 $q=-20, p=6$。同樣解得唯一實根 $x=2$。

113. 設實數 $\alpha=\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$ (97師大附中)

(1) 找一組整數 a, b 使得 α 是方程式 $x^3+ax+b=0$ 的一根。

(2) 試化簡 α 爲最簡單的表示方式。

答. (1) $a=15, b=-16$ (2) $\alpha=1$。

114. α, β 爲 $x^2+32x-64=0$ 二根，則 $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=$ ________。 (97台中二中)

答. -2。

115. 解方程式: $(X^2-3X-12)^3+6(X^2-3X-12)=X^3+6X$。 (97彰化藝術)

答. $6, -2$。

提示. x^3+6x 爲嚴格遞增函數。

116. $y=4x+a$ 與 $y=x^3+x$ 有 3 個交點，求 a 之範圍。 (100南湖高中代理)

答. $-2<a<2$。

解. 3 交點 $\Rightarrow x^3-3x-a=0$ 有三相異實根，即判別式 $-27a^2-4\cdot(-3)^3>0 \Rightarrow$ $-2<a<2$。

類題. 亦可以微分處理之，見 100成淵高中2。

3.2 對稱方程組

117. x, y 為正整數，$x > y$, $\begin{cases} xy + x + y &= 35 \\ x^2y + xy^2 &= 286 \end{cases}$ 成立，求 x, y 之值。 (97文華高中)

答. $(x, y) = (11, 2)$。

解. 令 $a = x + y, b = xy$，則 $\begin{cases} a + b &= 35 \\ ab &= 286 \end{cases} \Rightarrow a = 22$ 或 13。
$a = 13$ 時，可解得 $(x, y) = (2, 11)$ 或 $(11, 2)$；
而 $a = 22$，則 $x = 11 \pm 6\sqrt{2}$，為無理根，不合。

118. 解方程式 $\begin{cases} x + xy + y &= 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 &= 6 \end{cases}$。 (99松山高中)

答. $(x, y) =(2, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 2), (\frac{-4-\sqrt{2}-\sqrt{6+8\sqrt{2}}i}{2}, \frac{-4-\sqrt{2}+\sqrt{6+8\sqrt{2}}i}{2})$
or $(\frac{-4-\sqrt{2}+\sqrt{6+8\sqrt{2}}i}{2}, \frac{-4-\sqrt{2}-\sqrt{6+8\sqrt{2}}i}{2})$.

評. 此類問題，可少給一條方程式，改求極值，見 100慈濟聯招12。

119. ⋆ $x \le y \le z$，解方程組 $x + y + z = -4$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{2}{3}$, $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = -1$。

答. $(x, y, z) = (\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}, 1)$。 (99竹科實中)

120. 試解聯立方程式 $\begin{cases} x + y &= 5 \\ x^4 + y^4 &= 97 \end{cases}$。 (99高雄市聯招)

答. $(x, y) = (2, 3), (3, 2), (\frac{5+\sqrt{151}i}{2}, \frac{5-\sqrt{151}i}{2}), (\frac{5-\sqrt{151}i}{2}, \frac{5+\sqrt{151}i}{2})$。

121. ⋆ 解 $\begin{cases} (3a^2 + b^2)(a^2 + 3b^2) &= \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \\ 2(b^4 - a^4) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \end{cases}$ 之實數解。 (97台中一中)

答. $a = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{2}, b = \frac{\sqrt[5]{3}-1}{2}$。

解. 令 $x = a + b, y = a - b$，兩式相加減得 $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 &= \frac{4}{x+y} \\ x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 &= \frac{2}{x-y} \end{cases}$,
所以 $x^5 + y^5 = 4, x^5 - y^5 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[5]{3}, y = 1$。
因此 $a = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{2}, b = \frac{\sqrt[5]{3}-1}{2}$。

3.3 函數方程

122. 解函數方程 $f(x)+\log x\cdot f(\frac{1}{x})=2^x$，其中 $x>0$。 (100家齊女中)

答. $f(x)=\frac{2^x-2^{\frac{1}{x}}\log x}{1+(\log x)^2}$。

解. 將 x 換成 $\frac{1}{x}$，和原式聯立

$$\begin{cases} f(x)+\log x\cdot f(\frac{1}{x})=2^x \\ f(\frac{1}{x})-\log x\cdot f(x)=2^{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

化簡得 $(1+(\log x)^2)f(x)=2^x-2^{\frac{1}{x}}\log x\Rightarrow f(x)=\frac{2^x-2^{\frac{1}{x}}\log x}{1+(\log x)^2}$。

123. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x)-2f(\frac{1}{x})=x$，則 $f(x)=$ ________。 (99安樂高中2招)

答. $-\frac{x}{3}-\frac{2}{3x}$。

124. 設 $f(x)$ 爲實函數且滿足 $3f(x)-2f(\frac{1}{x})-\frac{5}{x}=0$，則 $f^2(x)$ 的最小值爲 ________。

答. 24。 (99師大附中)

125. ⋆ 求所有函數 $f(x)$，對任意實數 x，$|x|\neq 1$，滿足 $f(\frac{x-3}{x+1})+f(\frac{3+x}{1-x})=x$，則 $f(x)=$ ________。 (100南港高工)

答. $\frac{x^3+7x}{2-2x^2}$。

提示. 令 $\phi(x)=\frac{x-3}{x+1}$，則 $\phi(\phi(x))=\frac{3+x}{1-x}$, $\phi(\phi(\phi(x)))=x$。

評. 這幾題方法皆同，只是上一題的倒數很自然而已。分式的迭代循環亦見於 100文華高中1。

3.4 圖解法

126. 方程式 $\cos\pi x=\frac{x}{4}$ 的實根有 ________ 個。 (100成淵高中)

答. 9。

127. 設 $x,y\in\mathbb{R}$，若方程組 $\begin{cases} xy &= x+y \\ x^2+y^2 &= a \end{cases}$ 恰有三組相異實數解，求實數 a 的範圍。

答. $a=8$。 (100中壢高中)

128. 使方程式 $|x-1|-|x-2|+2|x-3|=k$ 恰有兩組解的 k 值的範圍爲 ________。

答. $k>1$ 且 $k\neq 3$。 (97師大附中)

129. 直線 $x+3y+k=0, y=||x|-3|$ 有四個交點，求 k 之範圍。 (100南湖高中代理)

答. $-9<k<-3$。

130. 若方程組 $\begin{cases} mx-y+2 &=0 \\ |x|+|y| &=1 \end{cases}$ 有解，則實數 m 之範圍為 ________。 (99中興高中)

答. $m\geq 2$ 或 $m\leq -2$。

131. 設 z 為複數，若 $|z-1|=1$，z^3 為實數，則 $z=$ ________ 。 (99安樂高中)

答. $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i, 0,$ 或 2。

解. $|z-1|=1$ 之圖形在複數平面上，為以 1 為圓心，半徑為 1 之圓。
而 $z^3\in\mathbb{R}$ 之圖形為三直線 $z=r, z=r(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i), z=r(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i), r\in\mathbb{R}$。
解得交點 $z=0,2,\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

132. 方程式 $(\frac{1}{2})^x=\log_2 x, (\frac{1}{2})^x=\log_{\frac{1}{2}} x, 2^x=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的解依次為 $x=a, x=b, x=c$，則 a,b,c 的大小順序為 ________。 (99基隆女中、99中正高中)

答 $a>b>c$。

133. (1) 在坐標平面上，試繪 $y=|x^2-2|x||$ 之圖形。 (97南港高工)
(2) 當方程式 $|x^2-2|x||=kx+1$ 恰有 4 個相異實數根，k 值範圍為？

答. (2)$\frac{-1}{2}<k<\frac{1}{2}$。

134. 設函數 f 具有如下性質：對於所有正實數 x 皆滿足 $f(3x)=3f(x)$ 且 $f(x)=1-|x-2|$, $(1\leq x\leq 3)$。試求：滿足 $f(x)=f(2010)$ 之最小 x 值為何？ (99中壢高中2招)

答. 420。

解. 嘗試畫圖 f 在各段的斜率為 ± 1，且在 3^k 處在極小值 0，在 $2\cdot 3^k$ 為極大值 3^k。
$3^6=729, 3^7=2187\Rightarrow f(2010)=|2187-2010|=177$。
$3^5=243$，$f(243+177)=|420-243|=177\Rightarrow f(420)=f(2010)$，而 $x\leq 243$ 時，$f(x)\leq 3^4=81$，故 x 之最小值為 420。

3.5 求解不等式

135. 求不等式 $\log_{(x+y)}\sqrt{1-x^2} > \log_{(x+y)} y$ 所形成的區域面積。 (100香山高中)

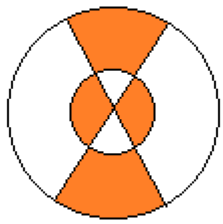
答. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$。

136. $x>0$，求不等式 $x^{x^2+3} > (x^2)^2$ 之解。 (99屏東女中)

答. $x>0$，但 $x\neq 1$。

137. 在坐標平面上，不等式 $(3x^2-y^2)\left[\log_2(25-x^2-y^2)-3\right]\geq 0$ 所表示的區域之面積爲 ________。 (100中壢高中2招)

答. 14π。



解. 如圖，內圈半徑 $\sqrt{17}$, 外圈半徑 5。
所求 $=\frac{2}{3}\pi\cdot 17+\frac{1}{3}\pi\cdot(25-17)=14\pi$。

138. 若 $\left[(|x|-2)^2+(|y|-2)^2-4\right]\cdot(x^2+y^2-4)\leq 0$，試求 x,y 在坐標平面上所形成的範圍面積爲 ________。 (97台中二中)

答. $32+4\pi$。

139. 若 $0\leq x,y\leq 2\pi$，試求 $\sin x\cdot\sin(x+y)\geq 0$ 所表示的區域面積。 (102景美女中)

答. $2\pi^2$。

140. $\star$ 若 $f(x)=5-6x+x^2$，求滿足 $f(x)+f(y)\leq 0$ 及 $f(x)-f(y)\geq 0$ 的 $P(x,y)$ 所表區域面積。 (98彰化女中)

答. 4π。

提示. 平移，令 $g(x)=f(x+3)=x^2-4$。$g(x)+g(y)\leq 0, g(x)-g(y)\geq 0$ 之解範圍，原解之平移 $(-3,-3)$，面積不變。

141. 設 $x,\ y\in\mathbb{R}$，且 $|x|<1$，$\frac{|x-y|}{|1-xy|}<1$，試求 y 之範圍。 (99育成高中)

答. $-1<y<1$。

3.6 複數、單位根

142. α, β 為兩複數，滿足 $\beta^2 - 2\alpha\beta + 4\alpha^2 = 0$，且 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$，若 α, β 在複數平面上所代表的點為 A, B，而 O 是複數平面的原點，則 $\triangle OAB$ 的面積為 ________。

答. $2\sqrt{3}$。 (100全國聯招)

提示. $(\beta - \alpha)^2 = -3\alpha^2$。

143. 設兩複數 z_1、z_2 均不為 0，若 $z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2 = 0$ 且 $|z_2| = 2$，則 $|z_1 - z_2| =$ ________。

答. $2\sqrt{3}$。 (99安樂高中)

另解. 旋轉長度不變，該方程為二次齊次式，亦不變，因此可不失一般性的假設 $z_2 = 2$。解得 $z_1 = -1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3^2 + 3} = 2\sqrt{3}$。

144. 已知複數 z_1, z_2 滿足以下條件: $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}|z_1|$，且 $0 < \arg\left(\frac{z_1+z_2}{z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) < \frac{\pi}{2}$，求 $\frac{z_2}{z_1}$。 (99高雄市聯招)

答. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$。

145. $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ 為複數平面上三相異點，滿足 $|\alpha - \beta| = 2$，且 $\alpha - 2\beta + \gamma = \sqrt{3}i(\beta - \gamma)$，則 $\overline{AC} =$ ________。 (98玉井工商)

答. $\sqrt{7}$。

提示. $\alpha - \beta = -(1 + \sqrt{3}i)(\gamma - \beta)$。

146. 設 $|z| = 1$且 $z^5 + z - 1 = 0$，試求複數 z 之值。 (98嘉義女中)

答. $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$。

提示. $z - 1 = -z^5 \Rightarrow |z - 1| = |z|^5 = 1$。

147. $\star$ 若 $|Z| = 1$ 且滿足 $Z^{28} - Z^8 - 1 = 0$ 的複數共有 n 個，假設 $z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$，其中 $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \ldots < \theta_n < 360°$，則 (1) $n =$? (2) 求 $\theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \ldots + \theta_{n-1}$。

解. (1) 8 (2) $\frac{10}{3}\pi$。 (97台中二中)

提示. $Z^{28} - Z^8 = 1 = |Z^{28}| = |Z^8| \Rightarrow 0, Z^8, Z^{28}$ 在複數平面上是一正三角形。

148. 已知 z 為非零複數，且 $z^5 = \bar{z}$，則在複數平面上，以滿足前述要求的 z 為頂點所成之多邊形的面積為 ________。 (100成淵高中)

答. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$。

149. 設 z 爲複數，且 $|z|=1, \frac{z+1}{z^2}\in\mathbb{R}$；若 $z\neq\pm1$，則 $z=$ ________。 (97高雄市聯招)

答. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

150. 實數 a, b 滿足 $(a+bi)^{101}=a-bi$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，則數對 (a,b) 有 ________ 組解。

答. 103。 (101文華高中)

151. 設 $z^{28}=1$ 的 28 個根爲 $t_1,t_2,t_3,\ldots,t_{28}$，則複數 $t_1^{2009},t_2^{2009},\ldots,t_{28}^{2009}$ 在複數平面所圍成的圖形爲 ________。 (100彰化女中)

答. 正方形。

152. 一單位圓內接正八邊形 $ABCDEFGH$，試證明圓上任一點 P 使得 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2$爲定值，並求出此定值。 (100台中二中)

證. 以複數平面表示之，八個頂點分別爲 $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\ldots,\omega^7$，其中 $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$。$P$ 點爲 $|z|=1$。則

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2=\sum_{k=0}^{7}(z-\omega^k)(\bar{z}-\bar{\omega}^k).$$

展開得 $16-\sum\limits_{k=0}^{7}(z\bar{\omega}^k-\bar{z}\omega^k)=16$。

153. 已知兩個同心圓，n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 爲內圓的內接正 n 邊形，點 P 爲外圓上任意一點，求證: $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_2}^2+\ldots+\overline{PA_n}^2$ 爲定值。 (99中正高中)

154. 試求方程式 $(x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)=0$ 的五個根在複數平面所構成的五邊形面積。

答. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$。 (97文華高中)

155. 方程式 $x^6+x^4+x^2+1=0$ 的六個根在高斯平面上圍成六邊形，求此六邊形的面積爲 ________。 (99中興高中)

答. $\sqrt{2}+1$。

提示. $x^8-1=(x^2-1)(x^6+x^4+x^2+1)$。

3.7 用不等式解等式

156. 設實數 x, y 滿足方程式 $\log\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\log x+\log y$，則數對 $(x,y)=$ ________。

答. $(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}, \frac{\sqrt[3]{9}}{3})$ (99中正預校)

解. 真數為正 $\Rightarrow x, y>0$。算幾可得 $\frac{x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}}{3}\geq\frac{xy}{3}\Rightarrow\log\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)\geq\log x+\log y$。
等號成立條件為 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$，解得 $(x,y)=(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}, \frac{\sqrt[3]{9}}{3})$。

評. 這類的問題，特點是方程式的數量比未知數少，但又不像一般的不定方程限定整數解。

157. 、方程組 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & =\frac{9}{4} \\ -8x+6y-24z & =39 \end{cases}$ 的解 (x,y,z) 為 ________。 (99中正高中)

答. $(-\frac{6}{13}, \frac{9}{26}, -\frac{18}{13})$。

提示. 柯西不等式。

158. θ 為銳角，$\frac{16}{\sin^6\theta}+\frac{81}{\cos^6\theta}=625$，求 $\tan\theta$。 (99彰化藝術)

答. $\tan\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$。

提示. 廣義柯西不等式。

類題. 另有 Hölder 不等式之方法，見 100玉井工商計算3。

159. 設 $x\, y$ 為實數且 a, b 為正數，若滿足 $\begin{cases} (x^2+y^2+9)(a^2+b^2+4) & =(ax-by+6)^2 \\ \frac{2a}{3b^2}+\frac{b}{2}+\frac{3b}{a} & =3 \end{cases}$，試求 $x+y+a+b$。 (100全國聯招)

答. 14。

3.8 其它

160. 設 $[x]$ 表示 x 的高斯函數，則方程式：$x^2-8[x]+7=0$ 的解為 ________。

答. $1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$。 (100台中二中)

解. 注意 $x-1<[x]\leq x\Rightarrow x^2-8x+7\leq 0$ 和 $x^2-8x+15>0$。
可知 $1\leq x<3$ or $5<x\leq 7$，以 $[x]=1,2,5,6$ 和 $x=7$ 代入得 $1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$ (其它不合)。

161. 解方程式 $[3x+1]=2x-\frac{1}{2}$，$x=$ ________。($[x]$：表示不大於 x 的最大整數)

答. $-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{5}{4}$ (100麗山高中)

162. 設 x 爲實數且滿足 $1 \le x < 2$，試求滿足方程式 $2x^2 - [2x^2] = 2(x-[x])^2$ 的解，其個數有多少? (101中科實中)

答. 3。

163. 設 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數；解方程式：$[x+\frac{1}{2}]^2 - 3[x-\frac{1}{2}] - 7 = 0$。(97高雄市聯招)

答. $x \in [\frac{7}{2}, \frac{9}{2}) \cup [\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2})$。

164. $x \in \mathbb{R}$，定義高斯符號 $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \le x\}$。若 $[x+0.19] + [x+0.20] + [x+0.21] + \ldots [x+0.91] = 546$。則 $[100x] =$ ________。 (99中壢家商)

答. 743。

解. $91 - 19 + 2 = 73$。$546 \div 73 = 7 \ldots 35 \Rightarrow$ 有 38 個 7 和 35 個 8。
所以 $[x+0.56] = 7, [x+0.57] = 8 \Rightarrow 7.43 \le x < 7.44 \Rightarrow [100x] = 743$。

165. a, b, c 爲相異實數，且 $abc \ne 0$，$x+y+z=0, (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$，且 $bcx + cay + abz = 1$ 的聯立方解爲 (α, β, γ)，則 $\alpha =$ ________。 (99嘉義高工)

答. $\frac{1}{bc-a(b+c)+a^2}$。

解. $(1,1,1) \times (b+c, c+a, a+b) = (b-c, c-a, a-b)$。
$\Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = t(b-c, c-a, a-b)$，代入第三式解 $t = \frac{1}{b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 + a^2b - ab^2}$。
$\therefore\ \alpha = \frac{b-c}{b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2} = \frac{1}{bc-a(b+c)+a^2} = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$。

166. 設 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 是從 $-2, -1, 0, 1$ 這四個整數內取值的數列，且滿足下列三個條件:
(1) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = -16$, (2) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = 48$, (3) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^3 = -70$，試求 $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^5$ 之值。 (99苗栗高中)

答. -286。

解. 設 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 中有 a 個 -2, b 個 -1, c 個 1。
則 $-2a - b + c = -16$, $4a + b + c = 48$, $-8a - b + c = -70$。
解聯立方程式得 $(a,b,c) = (9,5,7) \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^5 = 9 \cdot (-32) - 5 + 7 = -286$。

類題. 線性規劃的相似題，見 99桃園高中5。

167. 解方程式 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$。 (97楊梅高中)

答. $5 \le x \le 10$。

解. 化簡雙重根號 $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10$。

168. 求方程式 $x^2-2x-6|x-2|+16=0$ 的所有根(實根和虛根)。 (97楊梅高中)

答. $x=-2, 1 \pm \sqrt{3}i$。

4 不定方程

技巧 1: 不失一般性...

169. 設 a, b 均為大於 2 的整數，已知 $\frac{3b-1}{a}$ 和 $\frac{3a-1}{b}$ 均為整數，求 a 的所有可能之值和為？

答. 27。 (99桃園縣高中新進聯招)

解. 先假設 $a \le b \Rightarrow 3a-1=b$ 或 $2b \Rightarrow b=3a-1$ 或 $\frac{3a-1}{2}$。
再由 $a \mid 3b-1$ 和 $a \mid 6b-2$ 得 $(a,b)=(4,11)$ 或 $(5,7)$。
但 a, b 對稱，所以 a 所有可能值為 4, 5, 7, 11，其和為 27。

170. 是否能找出三個相異自然數，使得任意兩數之和被第三個數除之所得的餘數均為 1。

答. $3,2,2$；$6,4,3$；$15,10,6$。 (101復興高中)

171. 設 x, y, z 為自然數，$x<y<z$，且其中任二數之和均為另一數的倍數，則 $x:y:z=$ ________。 (98嘉義高工)

答. $1:2:3$。

評. 題目太好心，幫我們把不失一般性寫好了。

172. 設 x, y, $z \in \mathbb{N}$ 且 $xy+yz+zx=xyz$ 則數對 (x,y,z) 之解有 ________ 組。

答. 10。 (100苑裡高中)

評. 以上三題，皆利用不大小順序之假設，估計範圍。

173. 令滿足 $a+b+c+d=abcd$ 的正整數有 ________ 組解。 (97台南女中)

答. 12。

技巧 2: 配方、估範圍

174. 求 $x^2-4xy+6y^2-2x-20y=29$ 的正數數解共有________ 組。 (99萬芳高中)

答. 6 組。

提示. 配方得 $(x-2y-1)^2+2(y-6)^2=102$。

175. 求滿足 $x^2-4xy+5y^2+4x-6y+3=0$ 的整數解 (x,y)。 (100新竹高工)

答. $(x,y)=(-1,0),(-3,0),(-5,-2),(-7,-2)$。

176. 已知 x, y 均為正整數，則方程式 $x^2+y^2=208(x-y)$ 的解 (x,y) 為 ________。

答. $(160,32),(48,32)$。 (100松山家商)

177. 方程式 $x^3-19x+a=0$ 的三個根都是整數，求 a。 (100鳳新高中代理)

答. ± 30。

解. 令三根爲 α,β,γ，則 $\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-19$。
$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=38$，又 α,β,γ 整數，窮舉得 $(6,1,1),(5,3,2)$ 及其加入正負號和排列，檢驗 $\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-19$，得 $(\alpha,\beta,\gamma)=\pm(2,3,-5) \Rightarrow a=\pm 30$。

178. $\star$ N 爲三位數，是 11 的倍數，$\frac{N}{11}$ 爲 N 的各位數字的平方和，試找出所有的 N。

答. $803, 550$。 (100中和高中)

解. 設 $N=100a+10b+c=99a+11b+a-b+c$, 其中 a,b,c 爲 1-9 之正整數。
又 $11 \mid N$，所 $a-b+c=11$ 或 0, 即 $b=a+c$ 或 $a+c-11$。

(1) 若 $b=a+c, a^2+(a+c)^2+c^2=\frac{N}{11}=9a+(a+c)$,
整理得 $2a^2+2ac+2c^2=10a+c \Rightarrow 2a^2+(2c-10)a+2c^2-c=0$。
將其看作 a 的二次式，則判別式 $(2c-10)^2-8(2c^2-c)\geq 0 \Rightarrow \frac{-4-\sqrt{91}}{3}\leq c\leq \frac{-4+\sqrt{91}}{3}<2 \Rightarrow c=0$ 或 1。代回解 a，得 $N=550$。

(2) 若 $b=a+c-11, a^2+(a+c-11)^2+c^2=\frac{11}{N}=9a+(a+c-11)+1$。
整理得 $2a^2+2ac+2c^2-22a-22c+121=10a+c-10$,
$\Rightarrow 2a^2+(2c-32)a+2c^2-23c+131=0$。
判別式 $\geq 0 \Rightarrow (2c-32)^2-8(2c^2-23c+131)\geq 0 \Rightarrow 3c^2-14c+6\leq 0$,
$\Rightarrow \frac{7-\sqrt{31}}{3}\leq c\leq \frac{7+\sqrt{31}}{3} \Rightarrow c=1,2,3,$ 或 4，代回解 a，得 $N=803$。

評. 懶得配方，或者很醜，就直接砸判別式。

技巧 3: 承上，繼續估範圍

179. 若將 n 個連續正整數 $1, 2, 3, \ldots, n$ 中，刪去一個數後，使得剩下的 $(n-1)$ 個數的總和爲 2007，則刪去的數是 ________。 (100成德高中)

答. 9。

180. $\star$ $m, n\in\mathbb{N}$，若 $(m+n)^n=m^n+2320$，求所有可能的數對 (m,n)。 (100中壢高中)

答. $(3,4),(579,2)$。

解. $2320=(m+n)^n-m^n\geq m^n+n^n-m^n=n^n \Rightarrow n\leq 4$。
$n=1$: $m+1=m+2320$，無解。
$n=2$: $(m+2)^2-m^2=2320 \Rightarrow m=579$。

$n=3$：$2320=(m+3)^3-m^3=3\cdot[(m+3)^2+(m+3)m+m^2]$，但 $3\nmid 2320$，故無解。

$n=4$：$2320=16\cdot(m+2)(m^2+4m+8)\Rightarrow(m+2)(m^2+4m+8)=145$，所以 $m+2=1,5,29,$ 或 145，檢驗得僅 $m+2=5,\ m=3$合。

綜合以上，共兩組解 $(3,4),(579,2)$。

評. 整數解的不定方程中，估計出有限範圍，再以窮舉處理範圍內之解，是很常見的手法。

181. 設正實數 a 之小數部分爲 b，且 $a^2+2b^2=15$，則 $a+2b=$ ________。

答. $3\sqrt{3}$。 (100松山家商2招)

182. $\star$ 設 a,b 皆爲正整數，且 $a>b$，若 $\frac{a+b}{a^2+ab+b}=\frac{2}{11}$，則序對 $(a,b)=$ ________。

答. $(5,5)$ 或無解。 (100麗山高中)

183. 已知一個十進位制的三位數 $\overline{xyz}=x!+y!+z!$，求 $x+y+z$。 (99南港高工)

答. 10。

184. 使 m^2+m+7 爲完全平方數的正整數 m 有 ________ 個。 (97師大附中)

答. 2。

解. 令 $m^2+m+7=(m+k)^2, k\in\mathbb{N}$，則$(2k-1)m=7-k^2\Rightarrow m=\frac{7-k^2}{2k-1}$。
又 m 正整數，故 $k=1$ 或 2。可解得相對應之 $m=6$ 或 1。
故有 2 個正整數解。

其它

185. 已知 $146=5^2+11^2, 218=7^2+13^2$，試將 $146\times 218=31828$ 表示成兩個正整數的平方和。 (99松山高中)

答. 178^2+12^2。

解. 丟番圖恆等式 $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$。
取 $(a,b,c,d)=(5,11,7,13)$ 得 $178^2+12^2=31828$。

評. 沒看過此題或恆等式的，在考場裡可以直接和它 say goodbye 了。

186. $\sqrt{n}+\sqrt{m}=\sqrt{2527}$，$n>m>0$，則 (n,m) 有幾組正整數解。

答. 9。 (99桃園縣高中新進聯招)

187. $\star$ N 爲自然數，A, B, C, D 爲 N 的最小的四個相異正因數，且滿足 $N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$，試求 N。 (100中壢高中2招)

答. 130。

188. $\star$ 對於任何一個三位數 n，定義 $f(n)$ 爲 n 的三個數字和加上兩兩乘積和再加上三個數字的乘積。求使得 $\frac{f(n)}{n} = 1$ 的三位數 n 共 ________ 個。 (99萬芳高中)

答. 9。

189. $\star$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$，其中 a, b, $c \in \mathbb{Q}$。求 $a+b+c$。 (100中科實中)

答. $\frac{1}{3}$。

解. 令 $x = \sqrt[3]{2}$，則 $(x+1)^3 = 2 + 3x^2 + 3x + 1 = 3(x^2+x+1)$。
$\Rightarrow (x-1) = \frac{3(x^3-1)}{(x+1)^3} = \frac{3}{(x+1)^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = \frac{\sqrt[3]{3}}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{3}(x^2-x+1)}{x^3+1}$。
所以 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{3} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$。

評. 看到三遍也學不會的題目，背下答案吧。

190. $\star$ 已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是由正整數所組成的等比數列，而且滿足 $100 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 1000$。試求 n 的最大値，且其公比爲 r，則此 $(n, r) =$ ________。(100麗山高中)

答. $(6, \frac{3}{2})$。

解. 設 $r = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, p > q$ 且 $(p,q) = 1$，$a_n = a_1 \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} \in \mathbb{N} \Rightarrow q^{n-1} \mid a_1$。
令 $a_1 = cq^{n-1}$，則 $a_n = cp^{n-1}$。因此有 $100 \le cq^{n-1}, cp^{n-1} < 1000$。
若 $p = 2 \Rightarrow q = 1, c \ge 100 \Rightarrow n \le 4$。
若 $p \ge 4, 4^{n-1} < 1000 \Rightarrow n < 6$。
若 $p = 3$，由 $3^{n-1} < 1000 \Rightarrow n \le 7$。
若 $(p,q) = (3,2) \Rightarrow 64 \mid a_1 \Rightarrow a_1 \ge 128 \Rightarrow a_6 \ge 972, a_7 \ge 1458$。
若 $(p,q) = (3,1) \Rightarrow a_3 \ge 900,\ a_4 \ge 2700$。
故 n 之最大値 6，$r = \frac{3}{2}$。

5 整數論

5.1 因數、倍數

191. 將自然數 1, 2, 3, 4, 5, . . . 依序刪去 2 的倍數、3 的倍數、5 的倍數，其餘次序不變，得一數列 $\langle a_n\rangle = \langle 1, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\rangle$，則 $a_{100} =$ ________。 (101中科實中)

    答. 373。

    解. $\phi(30) = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 8$，$100 = 8 \times 12 + 4$。
    故 $a_{100} = 12 \times 30 + 13 = 373$。

    註. 以上的 ϕ 爲 Euler ϕ function。

192. 將與 105 互質之所有正整數由小到大排成一數列，求此數列第 1000 項之值。

    答. 2186。 (98高雄市聯招)

193. 設 a、b、c爲 0 到 9 的整數，a、b、c 不可同時爲 0 且不可同時爲 9。若將循環小數 $0.\overline{abc}$ 化爲最簡分數時，則分母有多少種情形？ (100彰化藝術暨田中高中)

    答. 7。

194. 在 xy 平面上，有多少條直線與 x 軸的截距爲正質數，與 y 軸的截距爲正整數且通過點 $(4, 3)$？ (100彰化藝術暨田中高中)

    答. 2 條。

195. 設 $n \in \mathbb{N}$，若 $p = n^4 - 38n^2 + 169$ 爲一質數，求此 p。 (100嘉義縣聯招)

    答. 97。

196. 若 $x \in \mathbb{Z}$，使得多項式 $2x^2 - x - 36$ 的值是某個質數的平方，則 $x =$ ________。

    答. 13, 5。 (97台中高工)

197. p 爲不小於 3 的質數，則位於雙曲線 $x^2 - y^2 = p^2$ 上的格子點有 ________ 個。

    答. 6。 (99文華高中)

198. 已知 p 爲質數，且二次方程式 $x^2 - 2px + p^2 - 5p - 1 = 0$ 的兩根均爲整數， 試求出所有 p 之值。 (97竹北高中)

    答. 3, 7。

199. 設 n 爲自然數，且 $\frac{n^3-3n^2+5n-13}{n-3}$ 爲質數，則滿足上述條件之所有自然數 n 的總和爲 ________。 (99全國聯招)

答. 12。

200. 設 p 爲大於 3 質數，a, b, c, d 爲整數，滿足 $a+b+c+d=0$, $ad-bc+p=0$, $a \geq b \geq c \geq d$，則 $a=$ ________。(以 p 表示) (97陽明高中)

答. $\frac{p+1}{2}$。

201. 若 s_1, s_2 爲完全平方數且滿足 $s_1 - s_2 = 1989$，則數對 (s_1, s_2) 共有 ________ 組。

答. 6。 (99中壢高中2招)

202. 下表中各行、各列的數都成無窮等差數列，請問此表中數字 2011 共出現幾次?

2	4	6	8	10	...
4	7	10	13	16	...
6	10	14	18	22	...
8	13	18	23	28	...
10	16	22	28	24	...
...	...	...	...	...	...

答. 6。 (100彰化女中)

203. 已知 a, b, c 爲正整數且滿足下列聯立方程式: (97彰化藝術)

$$(a-b)(b-c)(c+a) = -90$$
$$(a-b)(b+c)(c-a) = 42$$
$$(a+b)(b-c)(c-a) = -60$$

試求 a, b, c 的值。

答. $(a, b, c) = (3, 1, 6)$。

204. 證明: $2^{312} + 832$ 爲 448 的倍數。 (100玉井工商)

類題. 其它利用二項式定理的倍數問題 100中和高中1。

205. 有一個非常大的數字，它除了不可被 1 到 250 中某兩個連續整數 $k, k+1$ 整除，都可以被 1到 250 其他整數整除，試求 k 之值。 (100楊梅高中)

答. $k = 127$。

解. 注意 $k, k+1$ 必爲質數的冪次方，否則 k 或 $k+1$ 可分解成 2 個大於 1 且互質之數，而導致矛盾。又其一必爲偶數，故 $k=128$ 或 $k+1=128$。但 $129=3\times 43$，而 127 爲質數，故 $k=127$。

206. 求使得 $2^n+2^{16}+2^{19}$ 爲完全平方數的正整數 $n=$ ________。 (99建國高中)

答. 20。

解. 令 $2^n+2^{16}+2^{19}=m^2$。注意 $2^{16}+2^{19}=2^{16}\cdot 9=(3\cdot 2^8)^2$，所以 $2^n=m^2-768^2=(m+768)(m-768)$。
$\Rightarrow m+768, m-768$ 皆爲 2 的冪次方，且差爲 1536。
列出 2 的冪方：$1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,4096,\ldots$，得 $m-768=2^9, m+768=2^{11}\Rightarrow n=20$。

207. 若 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 爲互不相等的正奇數，滿足 $(995-x_1)(995-x_2)(995-x_3)(995-x_4)(995-x_5)=24^2$，試求 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 的個位數字。 (98嘉義女中)

答. 1。

208. 試求滿足 p^3+2p^2+p 恰有 42 個正因數這個條件的最小質數 p 爲多少？ (100家齊女中)

答. 23。

209. 若 $a<b<c<d<e$ 是連續的正整數，$b+c+d$ 是完全平方數，$a+b+c+d+e$ 是完全立方數，求 c 的最小值。 (100家齊女中)

答. 675。

210. 一長廊有 30 盞燈排成一列，依序編號爲$1,2,3,\ldots,30$，開始全部是關的，今有 30 人依次通過。第一人通過時，將全部燈打開；第二人通過時，將燈號爲 2 之倍數者關上；第三人通過時，將燈號爲 3 之倍數者改變狀態(開者關上，關者打開)；…；第 n 人通過時，將燈號爲 n 之倍數者改變狀態。今 30 人通過後，共有多少盞燈最後是開的？

答. 5 盞。 (98全國聯招)

解. 計算每個數的因數個數，奇數者會是開著，偶數者會關。因此只有完全平方數會是開著，$1,4,9,16$，25 共 5 盞。

211. (1) $\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{100}}{3}\right]$ (99基隆高中)

(2) p,q 爲兩互質之正整數，證明 $\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$。

提示. (2) 完全剩餘集。

212. 若 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則 $\sum\limits_{n=1}^{96}\left[\frac{53n}{97}\right]$。 (100家齊女中)

答. 2496。

213. 設 n 爲一個 101 位數的正整數，且能被 9 整除。令 n 的所有位數之和爲 a，a 的所有位數之和爲 b，則 b 的所有可能值之和爲 ________。 (101文華高中)

答. 27。

214. 從 1 開始的連續 n 個正整數中，拿掉兩個連續整數後，剩下的數的平均值爲 $29\frac{7}{11}$，求拿掉的兩個連續整數爲何？ (97彰化藝術)

答. $11, 12$。

提示. $11 \mid n-2$。

215. ⋆ 將 2000 表示爲兩個或兩個以上連續自然數的和，形如 $a_1+a_2+\ldots+a_k$，其中 $a_1<a_2<\ldots<a_k$，則 a_1 的所有可能值爲 ________。 (102北一女中)

答. $47, 398, 68$。

216. ⋆ 求出所有正整數 n 使得 4^n+n^4 爲質數。 (101中正預校)

答. $n=1$。

提示. $x^4+y^4=(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}yx+y^2)$。

5.2 同餘

217. 設 $(x,y)=(a,b)$ 爲方程式 $3^{33}x+2^{22}y=1$ 的整數解，若 $b>0$，則 $b\div 9$ 的餘數爲 ________。 (99中正高中)

答. 4。

218. n 爲正整數，若 n^3 除以 66 的餘數爲 n，則滿足條件的 n 共有 ________ 個。

答. 17。 (99中正預校)

219. 正整數 n 除以 3 餘 2，除以 5 餘 3，除以 7 餘 2，求 n。 (99中崙高中)

答. $23+105k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

解. 令 $n=35a+21b+15c$，由三條件得一特解 $(a,b,c)=(1,3,2), n=128$。
因此其所有解爲 $23+105k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

評. 此爲中國剩餘定理。

220. 求 4444^{4444} 除以 9 的餘數。 (100新北聯招)

答. 7。

221. 99^{2010} 除以 17 的餘數爲 ________。 (99文華2招代理)

答. 8。

解. 17 是質數，由費馬小定理得 $99^{16} \equiv 1 \pmod{17}$。
$2010 = 16 \cdot 125 + 10, 99 = 17 \cdot 5 + 14$。
故 $99^{2010} \equiv 14^{10} = 9^5 \equiv 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9 \equiv (-4)^2 \cdot 9 \equiv 8 \pmod{17}$。

評. 其實 $\{14^i\}$ 除以 17 是完全剩餘集，16 個一循環，所以 99^8 一定是 -1。以此化簡更迅速。

222. 求 3^{2009} 除以 1000 之餘數爲 ________。 (99中興高中)

答. 683。

解. $\phi(1000) = 400$, 又 $(3, 1000) = 1 \Rightarrow 3^{400} \equiv 1 \pmod{10^3}$ (Euler-Fermat 定理)。
因此 $3^{2009} \equiv 3^9 \equiv 683 \pmod{10^3}$。

223. 求 2009^{2009} 除以 33 的餘數。 (98新港藝術)

答. 8。

224. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{23} = \frac{a}{23!}$，若 a 除以 13 的餘數爲 b，求 $b^3 + 2b$ 除以 100 的餘數。

答. 57。 (99彰化藝術)

225. 若 $n = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 50 \cdot 50!$，則 n 除以 50 的餘數爲 ________。(100全國聯招)

答. 49。

226. 若 n 是小於 1000 的正整數，n^2 除以 7 餘 1，求 n 有 ________ 個。 (100卓蘭實中)

答. 285。

227. 不論 n 是何正整數，$3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ 恆爲正整數 P 的倍數，試求最大的 P 值，並證明你的結論。 (100成德高中)

答. 14。

228. 試證：關於 a, b, c 的不定方程式 $2009^a + 101^b = c^2$ 沒有正整數解。 (99松山家商)

提示. 考慮除以 4 的餘數。

229. 證明 1023 可以整除 $2^{999} + 2^{888} + 2^{777} + \ldots + 2^{222} + 2^{111} + 1$。 (97大里高中)

230. 平面上的格子點 (x, y 座標均為整數的點) 到直線 $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$ 的距離中的最小值為 ________。 (97師大附中)

答. $\frac{\sqrt{34}}{85}$。

提示. 直線方程式 $5x - 3y - 4 = 0$。

5.3 其它

231. (1) 求所有正整數 n 滿足 $2^n - 1$ 可被 7 整除。 (100中和高中)
(2) 試證：沒有正整數 n 使 $2^n + 1$ 可被 7 整除。

答. (1) $n = 3m, m \in \mathbb{N}$。

232. $\star$ p, q 為正整數，$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$，證明 p 可被 1979 整除。

證. 注意 (100中和高中、97彰化藝術)

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1319} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1318}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1319} - (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{659}) \\ &= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \ldots + \frac{1}{1319}.\end{aligned}$$

頭尾兩兩相加得 $\frac{1979}{m}$，全部相通分母得 $\frac{1979a}{660 \cdot 661 \cdot \ldots 1319}$。
又 1979 為質數，因此 $1979 \mid p$。

233. $\star$ 兩正數 $a = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} + \ldots + \frac{1}{2003\times2004}$，$b = \frac{1}{1003\times2004} + \frac{1}{1004\times2003} + \frac{1}{1005\times2002} + \ldots + \frac{1}{2004\times1003}$。則 $\frac{a}{b} =$ ________ (請化為最簡分數)。 (99彰化女中)

答. $\frac{3007}{2}$。

234. 正整數 a、b、c、d 滿足 $a + b = 3(c + d), a + c = 4(b + d), a + d = 5(b + c)$，求 a 可能的最小值。 (98彰化女中)

答. 83。

235. 集合 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，從 S 中取出四個不同的數字做成一個四位數，此四位數爲 99 的倍數共有 ________ 個。 (100文華高中代理)

答. 48。

236. $\star$ 已知大於或等於正整數 n 的整數都可以表成 $5a+14b+21c$ 的形式，其中 a, b, c 爲正整數，則 n 的最小值爲 ________。 (99桃園縣高中現職聯招)

答. 78。

解. 以下無特別說明，記號皆正整數。

可表示成$5a+14b+21c$，等價於可表示成 $28+5a+7d$, 但 $d\neq 2$。

任意正整數 $n=28+5a'+7d'$，其中 $a',d'\in\mathbb{Z}$，且 $0\leq a'<-7$，有唯一表示。

若 $d'>7$，取 $a=a'+7$, $d=d'-5$，則 $n=28+5(a'+7)+7(d'-5)=28+5a+7d$，其中 $d>2$。故此 n 可表示成 $28+5a+7d$ 的形式。剩餘的數中，以 $n=28+5\cdot 0+7\cdot 7=77$ 最大，且爲 爲不能表示之數，故 n 之最小值爲 78。

237. 設 m 爲整數，若 $x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}m-4=0$ 恰有一整數根，則 $m=$ ________。

答. 4 或 -1。 (99關西高中)

238. a 爲正無理數，x、y 爲有理數，$x=a^3+3a^2-14a+6$, $y=a^2-2a$，求 a。

答. $1+\sqrt{5}$。 (100南科實中)

解. 以 y 除 x，可得 $x=(a+5)(a^2-2a)-4a+6$。

可將 x 改寫， $x=(a+5)(y-4)+26\Rightarrow x-26=(a+5)(y-4)$。

又 x, $y\in\mathbb{Q}$，所以 $x=26$, $y=4$。解 $y=a^2-2a$ 得 $a=1\pm\sqrt{5}$ (取正)。

239. $x^3+(a-1)x^2+(1-2a)x+(a-1)=0$ 的三根爲整數，求 a 及三根。

答. $a=1$，三根 $1,0,-1$；$a=-5$，三根 $1,2,3$。 (100南湖高中代理)

240. $\star$ 設 $m,k\in\mathbb{Q}$，不論 m 爲任何數, $x^2-3(m-1)x+(2m^2+3k)=0$ 二根均爲有理數，則 $k=$ ________。 (98中興高中)

答. -6。

解. $x=\frac{3(m-1)\pm\sqrt{9(m-1)^2-8m^2-12k}}{2}=\frac{3(m-1)\pm\sqrt{m^2-18m+9-12k}}{2}$。其爲有理數，充要條件爲根號內爲有理數之平方。$m^2-18m+9-12k=(m-9)^2-72-12k$。取 $k=-6\Rightarrow -72-12k=0\Rightarrow x$ 爲有理數。

反之，假設 $k\neq -6$，且滿足題意。取 $m=9$，得 $-72-12k=p^2$，其中 p 爲非 0 有理數。再令 $m=9+p$，則得 $x=\frac{3(m-1)\pm\sqrt{2}p}{2}\notin Q$，矛盾。故有唯一解 $k=-6$。

241. 設 p, q 爲整數，方程式 $x^2-(4p+3)x+q=0$ 的兩根均爲質數，且 $2q-7p=40$，求此方程式之兩根爲 ________。 (98嘉義高工)

答. $2, 17$。

242. (1)設正五邊形的一邊長爲 a，試求其對角線的長。 (100成德高中)
(2)在座標平面上，橫、縱座標均爲整數的點稱爲格子點。試問有沒有頂點都是格子點的正五邊形？有，請舉一例；沒有，請詳加證明。

答. (1) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ (2)沒有

243. 設 n 是大於 1 的正整數，證明： $(n-1)!$ 除以 n 的餘數爲 $n-1 \Leftrightarrow n$ 爲質數。 (100師大附中)

244. 求方程式 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}=y$，$x$, y 的非負整數解，其中共有 2011 個 $\sqrt{\ }$，且指正根而言。 (100鳳山高中)

答. $(0,0)$。

245. 設正整數 a, b, c, n 滿足 $2^n=a!+b!+c!$，若 $a\geq b\geq c$，試求序對 (a,b,c,n)。

答. $(2,1,1,2),(3,1,1,3),(4,3,2,5),(5,3,2,7)$。 (99台中一中)

246. $1,2,3,\ldots,97$ 共 97 個自然數中，能夠表示成兩正整數的平方差的數共有 ____ 個。

答. 71。 (97師大附中)

6 多項式

6.1 餘式定理

247. 若$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$，則多項式 $g(x) = f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式爲 ____。

 答. 11。 (97中興高中)

248. 設 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 4$，則 $f(x)$ 除以 $(x - \sqrt{2} - 1)$ 的餘式爲 ________。

 答. 9。 (100內湖高工2招)

 解. $1 + \sqrt{2}$ 爲 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 之根，以之除 $f(x)$ 得商 $x^2 - 4x + 5$, 餘 9。
 所以 $f(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 4x + 5) + 9$。因此所求爲 9。

249. $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^4 - 3 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) + 7 =$ ________。 (100南港高工)

 答. $\frac{21-5\sqrt{13}}{2}$。

250. 已知 a 是 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的一個根，試求 $2a^4 - 9a^3 + 9a^2 - 12a - 3 + \frac{4}{a^2+1}$。

 答. -2。 (100基隆女中代理)

 解. 以 $a^2 - 4a + 1$ 除 $2a^4 - 9a^3 + 9a^2 - 12a - 3$，得餘式 $a - 6$。而 $a^2 + 1 = 4a$。
 故所求 $= a - 6 + \frac{1}{a} = \frac{a^2-6a+1}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$。

 類題. 此方法可運用於三角有理式之化簡，見 101台南二中9。

251. 設 $f(x) = x^{300} - 2x^{62} + 3x^{10} + 4x - 1$，則 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 之餘式爲 ________。

 答. $9x + 2$。 (98中興高中)

 解. $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 的餘式爲 $1 - 2x^2 + 3x + 4x - 1 = -2x^2 + 7x$。再除以 $x^2 + x + 1$，得餘式爲 $9x + 2$。

252. 求 $f(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ 除以 $x^3 - x$ 的餘式。 (99松山高中)

 答. $5x$。

253. 設 x^5 除以 $(x-1)^3$ 得餘式爲 $g(x)$，求 $g(2)$ 之值。 (98全國聯招)

 答. 16

 解. 用二項式定理展開 $(x - 1 + 1)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} C_k^5 (x-1)^k$。
 因此餘式 $g(x) = \sum_{k=0}^{2} C_k^5 (x-1)^k$。$g(2) = C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 = 16$。

254. 多項式 $(x^5+x^2+2x+3)^3$ 被 x^4+x+1 除之餘式爲 ________。 (100金門農工)

答. $(x+3)^3$。

255. 若 $(x^{2000}-1)$ 除以 $(x^4+x^3+2x^2+x+1)$ 之餘式爲 ax^3+bx^2+cx+d，則實數 $a+b+c+d$ 之值 $=$ ________。 (99中興高中)

答. -6。

提示. $x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+1)(x^2+x+1)$。

256. 設 $f(x)$ 是一個四次多項式，已知 $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式爲 2，$f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式爲 -8，$f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式爲 8，則 $f(0)=$ ________。 (100新北聯招)

答. $-\frac{5}{6}$。

提示. 令 $f(x)=(ax+b)(x-1)^3+2$。

257. 設 $f(x)$ 爲三次以上的多項式，除 x^2+x+1 餘 $7x+16$，除以 $x-1$ 餘 8，求 $f(x)$ 除以 x^3-1 的餘式。 (100嘉義縣聯招)

答. $-5x^2+2x+11$。

258. 設 $f(x)$ 爲實係數多項式且滿足 $f(3-i)=7-3i, f(2)=2$，則 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x^2-6x+10)$ 的餘式爲 ________。 (100彰化女中)

答. $-x^2+9x-12$。

259. $x^{20}+1$ 除以 $(x^2+1)(x^4-4)$ 的餘式爲 ________。 (100全國聯招)

答. $341x^4-339$。

提示. $x^{20}+1$ 除以 x^4-4 的餘式爲 $4^5+1=1025$，故可令 $x^{20}+1=(x^2+1)(x^4-4)Q(x)+(ax+b)(x^4-4)+1025$。

260. x^{2009} 除以 $(x-1)^2(x^2+1)$ 所得餘式爲 ________。 (98彰化女中)

答. $(x^2+1)(1004x-1004)+x$。

評. 以上幾題，都透過部分的除法，假設餘式的形狀或被除式的形狀，再以其它條件決定待定係數。

261. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a,b,c,d 爲常數，若以 x^2+x+2 除 $f(x)$，餘 $x+2$，以 x^2+x-2 除 $f(x)$，餘 $3x+4$，求序對 $(a,b,c,d)=$ ________。

答. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 3)$。 (99基隆女中)

262. 設 $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$，試求 $f(x^6)$ 除以 $f(x)$ 所得的餘式爲 ________。

答. 6。 (100全國聯招)

263. 設 $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$，求 $f(f(x))$ 除以 $f(x)$ 的餘式。

答. 120。 (98玉井工商)

解. $f(f(x)) = (f(x)+1)(f(x)+2)(f(x)+3)(f(x)+4)(f(x)+5) = q(x)f(x) + 5!$。
餘式$= 120$。

264. 求 $x^8 + x + 1$ 除以 $x^2 - x - 1$ 的餘式。 (100南科實中)

答. $22x + 14$。

解.
$$\begin{array}{ccccccc|cc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & +1 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \multicolumn{1}{|c}{22} & 14 & \end{array} \Rightarrow (21x+13)+(x+1) = 22x+14。$$

評. 其實寸絲沒特別學過二次的綜合除法，所以上面的記號是自己寫的，可能和您習慣的寫法不同。

265. ⋆ 設 a, b 爲實數，已知 $ax^{17} + bx^{16} + 1$ 能被 $x^2 - x - 1$ 整除，則 $a =$ ________。

答. 987。 (100楊梅高中、100麗山高中)

解. 考慮 p, q 爲 $x^2 - x - 1 = 0$ 之兩根，則 $pq = -1, p+q = 1$。則 $\begin{cases} ap^{17} + bp^{16} + 1 = 0 \\ aq^{17} + bq^{16} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$a = \frac{p^{16}-q^{16}}{p^{17}q^{16}-q^{17}p^{16}} = \frac{(p^8+q^8)(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)(p-q)}{p-q}$。
而 $p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 3 \Rightarrow p^4 + q^4 = 7, p^8 + q^8 = 47$。
$a = 47 \cdot 7 \cdot 3 = 987$。

另解. 綜合除法除法逆著寫，會看到斐波那契數列，下面那題試試另解吧!

266. ⋆ 已知 m、n 是整數，且 $mx^{17} + nx^{16} + 1$ 是 $x^2 + x - 1$ 的倍式，則 $m =$ ________。

答. -987。 (97中和高中)

6.2 因式定理、一次因式檢驗法

267. 多項式 $f(x)$ 領導係數為 1，且 $xf(x-1)=(x-4)f(x)$，求 $f(x)$。

答. $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$。 (99高雄高中、99家齊女中)

268. 設 $f(x)$ 為多項式，滿足 $xf(x-1)=(x-7)f(x)$，且 $f(7)=2\times 7!$，求 $f(x)$。

答. $f(x)=2x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ (99台中二中)

269. 設 a 為整數。若多項式 $f(x)=(x-2009)(x-2010)(x-a)-98$ 有整係數之一次因式，試求 a 值。 (99家齊女中)

答. 1962 或 1959。

270. 整係數多項式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，若 $p(0)$ 和 $p(1)$ 的值均為奇數，證明: $p(x)=0$ 沒有整數解。 (100鳳山高中)

271. 整係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，若 $a_n, f(0), f(1)$ 均為奇數。試證: $f(x)=0$ 沒有有理根。 (101文華實中)

提示. 一次因式檢驗法，歸謬地假設 $\frac{p}{q}$ 是有理根，考慮 $q^nf(\frac{p}{q})$。

272. 假設一個 5 次整係數多項式 $g(x)$ 的根全為整數，試目共有多當組可能的根使得 $g(x)$ 可表成 $g(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+6$，其中 a,b,c,d 為整數。 (99屏北高中)

答. 13。

評. 整係數的條件用不到，整根 + 首項是 1 $\Rightarrow$ 整係數。

6.3 插值多項式

273. (1) $f(x)$ 為 x 之三次多項式，且 $f(2007)=2, f(2008)=0, f(2009)=1, f(2010)=1$，試求 $f(2011)$。 (100香山高中)

(2) $f(x)$ 為三次多項式且 $f(2010)=1, f(2011)=9, f(2012)=9, f(2013)=9$，求 $f(2014)$。 (102全國聯招)

(3) $f(x)$ 為四次多項式，且 $f(1996)=0, f(1998)=1, f(2000)=4, f(2002)=27, f(2004)=256$，求 $f(2008)$ 之值。 (97台中一中)

(4) 設 $f(x)$ 為三次式，若 $f(23)=5,\ f(24)=6,\ f(25)=25,\ f(26)=44$，則 $f(x)$ 除以 $x-22$ 之餘式為 ________。 (99文華2招代理)

答. (1) -4 (2) 17 (3) 2916 (4) 40。

解(1) 由巴貝琪定理得 $f(2007)-4f(2008)+6f(2009)-4f(2010)+f(2011)=0\Rightarrow f(2011)=-4$。

274. 求首項係數爲 2，且滿足 $4f(1)=3f(2)=2f(3)=f(4)$ 的三次多項式 $f(x)$。

答. $2x^3-10x^2+20x$。 (100北一女中)

解. 令 $g(x)=\frac{3}{f(1)}\cdot f(x)$，其四次差分爲 0，可推得 $g(0)=0$。由首項係知 $\frac{3}{f(1)}\cdot 2\cdot 3!=3\Rightarrow\frac{f(1)}{3}=4$。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 3 & & 4 & & 6 & & 12 \\
& 3 & & 1 & & 2 & & 6 & \\
& & -2 & & 1 & & 4 & & \\
& & & 3 & & 3 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f(1)}{3}\cdot g(x)\\
&= 4\cdot\left[3x-2\cdot\frac{x(x-1)}{2}+3\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\right]\\
&= 2x^3-10x^2+20x.
\end{aligned}
$$

評. 此差分，即牛頓頓揷値多項式的算法。

275. 令 $f(x)$ 爲領導係數爲 1 的實係數四次多項式，且 $f(99)=2$、$f(98)=5$、$f(97)=10$、$f(96)=17$，試求 $f(100)$。 (99大安高工)

答. 25。

276. $f(x)$ 爲一 2009 次多項式，滿足 $f(k)=\frac{1}{k}$，其中 $k=1,2,3,\ldots,2010$，求 $f(2012)$ 之値? (100基隆高中)

答. $-\frac{1005}{1006}$。

解. $f(x)$ 應爲 2009 次多項式。令 $g(x)=xf(x)$，則 $g(1)=g(2)=\ldots=g(2010)=1$。

所以 $g(x)=c\prod\limits_{k=1}^{2010}(x-k)+1\Rightarrow f(x)=\frac{c\prod_{k=1}^{2010}(x-k)+1}{x}$，當 $x\neq 0$。

f 多項式，所 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，所以 $c=-\frac{1}{2010!}$。

$f(2012)=\left(-\frac{2011!}{2010!}+1\right)/2012=-\frac{1005}{1006}$。

評. 這題也是考到爛了。

277. 多項式 $f(x)$，已知 $\deg f(x)=98$，$f(k)=\frac{1}{k}$ ($k=1,2,3,\ldots,99$)，試求 $f(100)$。

答. $\frac{1}{50}$。 (101中科實中)

278. 設 a,b,c 爲相界實數，若$f(x)=\frac{a(x+a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x+b)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$，則 $f(-\frac{a+b+c}{2})=$ ________。 (99松山高中)

答. 0。

解. $f(-a)=(a+b+c)-2a, f(-b)=(a+b+c)-2b, f(-c)=(a+b+c)-2c$。
又 f 爲二次以下多項式。
故 $f(x)=a+b+c+2x$，$f(-\frac{a+b+c}{2})=0$。

279. 設 $f(x)$ 爲一五次多項式，$f'(x)$ 爲其導函數，若 $f(1)=f(2)=f(3)=f'(2)=f'(3)=0$，$f'(0)=1$ 則 $f(0)=$ ________。 (99嘉義高工)

答. $-\frac{3}{8}$。

6.4 其它

280. 設 $f(x)$ 是三次多項式，若 $f(3x+1)>0$ 的解爲 $-1<x<1$ or $x>2$，試求 $f(2x+3)<0$ 的解。 (99彰化藝術)

答. $\frac{1}{2}<x<2$ or $x<-\frac{5}{2}$。

281. 設 $f(x)$ 爲實係數多項式，若對所有實數 x，$8f(x^3)-x^6f(2x)-2f(x^2)+12=0$ 恆成立，求 $f(x)$。 (99育成高中)

答. $f(x)=x^3-2$。

解. 令 $f(x)=\sum a_nx^n$。由 $8f(x^3)-x^6f(2x)-2f(x^2)+12=0$ 中 0 次項可得 $a_0=-2$；由 2、4 次項可得 $a_1=a_2=0$；再由 6 次項知 $a_3=1$；由 8、11 項得 $a_4=a_5=0$；類推可推 $a_n=0, n>3$。

282. 因式分解 $a^{10}+a^5+1=$ ________。(答案爲兩個有理式的乘積) (100成淵高中)

答. $(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$。

解. 先解方程式 $a^{10}+a^5+1=0$，令 $b=a^5\Rightarrow b^2+b+1=0\Rightarrow b=\omega$ or ω^2，其中 $\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2\pi}{3}\Rightarrow a=\omega,\omega^2$ 亦爲 $a^{10}+a^5+1=0$ 之根。
所以 $a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$。

283. 因式分解: $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a+c-b)^3-(a+b-c)^3$。 (97彰化藝術)

答. $24abc$。

解. 前兩項立方差，後兩項立方和公式，可得原式$=2a\cdot(\ldots)$，由對稱可得 b, c 亦爲因式。又原式爲三次式，所以原式 $=kabc$。只展開原式中的 abc 項，可得 $k=24$。

284. $3^{33}+1$ 分解爲三個整數之積，使得每個因數都大於 3^{10}。請寫下計算過程。

答. $(3^{11}+1)(3^{11}+3^6+1)(3^{11}-3^6+1)$。 (100嘉義縣聯招)

解. $3^{33}+1=(3^{11}+1)(3^{22}-3^{11}+1)=(3^{11}+1)\left((3^{11}+1)^2-3\cdot 3^{11}\right),$
$=(3^{11}+1)(3^{11}+3^6+1)(3^{11}-3^6+1)$。

7 根與係數關係

7.1 求多項式

285. (1) 設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 爲一實係數多項式，已知 $f(x)=0$ 沒有實根，設 r_1, r_2, r_3, r_4 爲 $f(x)=0$ 的四個複數根，且 $r_1+r_2=3-i, r_3\cdot r_4=4+3i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $a+b+c+d=$ ________。 (99嘉義高工)

(2) 設實係數方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$，有四個相異虛根，其中兩根的和是 $2+3i$，另兩根 的乘積是 $4+3i$，則 b 值爲 ________。 (99關西高中)

(3) 設 a, b, c, d 爲實數，已知方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有四個虛根，此四根中，其中二根的乘積爲 $13+i$，另二根的和爲 $3+4i$, $i=\sqrt{-1}$，則 $a+b=$ ________。 (97全國聯招)

(4) $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx-13, a, b, c\in\mathbb{R}$，若 $f(x)=0$ 有四個虛根 r_1、r_2、r_3、r_4，滿足 $r_1+r_2=1-i, r_3\times r_4=2-3i$，則 $2a+b+c+d=$ ________。 (98彰化女中)

答. (1) 7 (2) 21 (3) 45 (4) 9。

解(1) 不失一般性可設 $r_3=\bar{r}_1, r_4=\bar{r}_2$，因此 $r_1\cdot r_2=4-3i$，$r_3+r_4=3+i$。
領導係數爲 $1\Rightarrow f(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$。
兩兩乘得 $(x^2-(3-i)x+4-3i)(x^2-(3+i)+4+3i)$
$a+b+c+d=f(1)-1=8-1=7$。

286. ⋆ 設 $f(x)=x^2+ax+b$，若 $f(f(x))<f(x)$ 的解爲 $-2<x<-1$ 或 $4<x<5$，則序對 $(a,b)=$ ________。 (99文華高中)

答. $(-3,-5)$。

解. 展開 $f(f(x))-x$ 和 $(x-5)(x-4)(x+1)(x+2)$ 比較係數可得 a, b。

另解. 注意 $f(x)=x$ 的解，亦爲 $f(f(x))=f(x)$ 的解，猜測 $f(x)-x\mid(f(f(x))-f(x))$。
令 $y=f(x)$，則 $f(f(x))-f(x)=y^2+ay+b-y$。

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & b & x \\ & x & ax+x^2-x & \\ \hline 1 & a+x-1 & \multicolumn{1}{|c}{y-x} & \end{array} \quad \begin{aligned}\Rightarrow f(y)-y&=(y-x)(y+x+a)\\&=(x^2+(a-1)x+b)(x^2+(a+1)x+a+b)\end{aligned}。$$

又 $f(f(x))-f(x)=(x-5)(x-4)(x+1)(x+2)$，觀察三次項係數可知 $a=-3$。
因此 $(x-5)(x-4)(x+1)(x+2)=(x^2-4x+b)(x^2-2x+b-3)$，配對知 $x^2-4x+b=(x-5)(x+1)\Rightarrow b=-5$。

評. 另解只是懶得展開，給自己找麻煩。

287. $a \in \mathbb{R}$，已知方程式 $x^3 - 4x^2 + 8x + a = 0$ 有一虛根之絕對值爲 2，則此方程式的所有根爲何？ (100松山家商)

答. $2, 1 \pm \sqrt{3}i$。

288. 設 $a \in \mathbb{R}$，方程式 $x^3 + ax^2 - 7x + 15 = 0$ 有一個虛根的絕對值爲 $\sqrt{5}$，則 $a =$ ________。

答. -1。 (100中正高中)

289. 設 $a \in \mathbb{R}$，且 $x^3 + x^2 - x + a = 0$ 有一虛根 $\cos\theta + i\sin\theta$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$
(1) $\theta =$ ________ (2) $a =$ ________，其它根？ (100基隆高中)

答. $\theta = \frac{\pi}{3}, a = 2,$ 其它根 $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -2$。

290. 設 $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - n, g(x) = x^3 + (2-m)x^2 - (n+3)x - 8$，其中 m, n 皆爲整數且 $f(x) = 0$ 之三根成等差數列，而 $g(x) = 0$ 之三根成等比數列，則 $m^2 + n^2 =$ ________。

答. 10。 (100南港高工)

291. $x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + k = 0$ 有二根和爲 1，求方程式所有的解。 (100松山家商2招)

答. $\pm\sqrt{3}, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

292. 若實係數方程式 $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 3ax + a = 0$ 恰有 2 實根，且此 2 實根之和爲 3，則 $a =$ ________。 (100南港高工)

答. 5。

293. $\star$ 已知曲線 $f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x^2 + 6x - 5$ 在 $x = s$ 與 $x = t$ (其中 $s \neq t$) 時的切線重合，求 $|s - t|$。 (100北一女中)

答. $2\sqrt{11}$。

解. $(x-s)^2(x-t)^2 = f(x) - (ax+b)$，比較係數得 $s+t = -2$ 和 $t^2+4ts+s^2 = -16$。
$\Rightarrow 2ts = -20, (t-s)^2 = (s+t)^2 - 4ts = 44 \Rightarrow |t-s| = 2\sqrt{11}$。

294. 設 $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$，若 $p(x) = 0$ 的三根之和、三根之積與各項係數的和均相等，且的圖形與 y 軸交於$(0, 2)$，則 $b =$ ________。 (100新北聯招)

答. -7。

295. 設有一等腰三角形的三邊長爲有理數，且恰好是方程式 $x^3 - 16x^2 + px - 150 = 0$ 的三根，試求 p 之值。 (97台中女中)

答. 85。

7.2 對稱多項式(有理式)

296. $\tan\alpha, \tan\beta$ 爲 $x^2-ax+b=0$ 之兩根，以 a, b 表示 $\cos^2\alpha-\sin^2\beta$。 (99屏東女中)

答. $\frac{1-b^2}{1+a^2-2b+b^2}$。

297. 已知 a, b, c 爲方程式 $x^3+x^2-2x+3=0$ 的三根，則 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=$ ________。

答. $\frac{-2}{9}$。 (98新港藝術)

298. 設 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 的三根爲 α, β, γ，則 $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=$ ________。

答. -22。 (99苗栗高中)

解. $x^5\div(x^3+2x^2+3x+4)=(x^2-2x+1)\dots 5x-4$。
所以 $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=5(\alpha+\beta+\gamma)-12=-22$。

類題. 隱藏三根版見 99文華2招代理9。

299. 設 $4x^3+3x^2+2x+1=0$ 三根爲 α, β, γ 則 $\frac{1}{\alpha^5}+\frac{1}{\beta^5}+\frac{1}{\gamma^5}$。 (100苑裡高中)

答. -22。

解. 令 $y=\frac{1}{x}$，見上題。

300. (1) 設 α,β,γ 爲方程式 $2x^3+x^2-x-7=0$ 的三根，則 $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}+\frac{1}{\gamma-1}=$ ________。 (100北港高中)

(2) 設 $x^4-3x^3+5x^2+x+2=0$ 四根爲 a, b, c, d 則 $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}+\frac{1}{2-d}=$ ________。 (100文華高中)

(3) 設 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 次多項方程式 $x^n+x^{n-1}+\dots+x+1=0$ 的 n 個根，試求：$\frac{1}{\alpha_1-1}+\frac{1}{\alpha_2-1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n-1}$。 (100中壢高中2招)

(4) 設方程式 $x^4+4x^3-4x^2-16x+1=0$ 的四個根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 與 α_4。試求下列方程式的解 (97台北縣聯招、97台大數學)

$$\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x-\alpha_3}+\frac{1}{x-\alpha_4}=0.$$

答. (1) $\frac{7}{5}$ (2) $\frac{17}{16}$ (3) $-\frac{n}{2}$ (4) $x=-1$ 或 $-1\pm\sqrt{5}$。

解(1) 令 $f(x)=2x^3+x^2-x-7=0$，則 $f'(x)=6x^2+2x-1$。
所求 $=-\frac{f'(1)}{f(1)}=-\frac{7}{(-5)}=\frac{7}{5}$。

評. (1)—(3) 亦可利用平移加倒根。

301. (1) 方程式 $x^3-3x+1=0$ 之三根 α, β, γ，在複數平面上所對應的點分別爲 A, B, C，而 P 點表複數 i，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}=$ ________。 (98中興高中)

(2) 設 A, B, C, D 表 $z^4-z^2+1=0$ 之四根在複數平面上的對應點，又 P 表複數 i 在複數平面上的對應點，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}=$ ________。 (100鳳山高中)

(3) 設 $z^5=32$ 之五個根在複數平面上，對應點依次爲 $A_0A_1A_2A_3A_4$，則 $\overline{A_0A_1}\cdot\overline{A_0A_2}\cdot\overline{A_0A_3}\cdot\overline{A_0A_4}=$ ________。 (100新竹高工、97台南二中)

(4) 設 $w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，若 $A(1), B(w), C(w^2), D(w^3), E(w^4)$ 爲複數平面上五個點，試求: $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}$ 之值。 (97台南女中)

(5) 設 A, B, C, D, E 表示 $z^5=i$ 之五根在複數平面上的對應點，若點 P 爲 $1+i$ 在複數平面上的對應點，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}$ 之值爲 ________。

答. (1) $\sqrt{17}$ (2) 3 (3) 80 (4) 5 (5) $\sqrt{41}$。 (102文華高中)

解(1) $(i-\alpha)(i-\beta)(i-\gamma)=i^3-3i+1=1-4i\Rightarrow\sqrt{17}$。

302. 設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，則 $(2-3\omega)(2-3\omega^2)(2-3\omega^3)(2-3\omega^4)=$ ________。

答. 211。 (97嘉義高中)

303. 設 $\omega=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$, $f(x)=(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^5)(x-\omega^9)(x-\omega^{11})(x-\omega^{13})$，則 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式爲 ________。 (102台中女中)

答. 43。

提示. 考慮方程式 $x^7=-1$。

304. $\star$ 設 $f(x)=x^3+2x^2-3x-1$，$g(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+2$，且 α, β, γ 爲 $f(x)=0$ 之三根。試求 $g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma)$ 之值。 (100全國聯招)

答. 35。

解. $g\div f$ 餘 $-x+3$，所以 $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=f(3)=35$。

305. (1) 設方程式 $x^4+x+1=0$ 的四個複數根爲 r_1, r_2, r_3, r_4。若 $p(x)=x^2-3$，則 $p(r_1)\times p(r_2)\times p(r_3)\times p(r_4)=$ ________。 (99萬芳高中)

(2) $x^4+3x+5=0$ 有四個複數根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，若 $f(x)=x^2-3$，則 $f(\alpha)\times f(\beta)\times f(\gamma)\times f(\delta)=?$ (100板橋高中)

(3) $\star$ 設 $f(x)=x^{12}+7x^{11}+1$, $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ 爲 $f(x)=0$ 的 12 個相異根，則 $\prod_{i=1}^{12}(x_i^2-x_i+1)=$ ________。 (98師大附中)

答. (1) 97 (2) 169 (3) 67。

306. 已知方程式 $x^5-32=0$ 的四個相異虛根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，設 $f(x)=x^3+x^2+1$，則 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(\delta)$。 (97松山家商)

答. -8。

解. 利用互質，用一點數論可得 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=4\cdot(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, 和 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=2\cdot(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$。所以 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(\delta)=6\cdot(-2)+4=-8$。

307. 已知 $\begin{cases} x+y+z &= 5 \\ x^2+y^2+z^2 &= 13 \\ x^3+y^3+z^3 &= 41 \end{cases}$，求 $x^4+y^4+z^4=$ ________。 (99文華2招代理)

答. 137。

解. $xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]=6$,
$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \Rightarrow xyz=2$。
因此 x, y, z 爲 $t^3-5t^2+6t-2=0$ 之三根。
$t^3=5t^2-6t+2 \Rightarrow t^4=5t^3-6t^2+2t \Rightarrow x^4+y^4+z^4=5\cdot41-6\cdot13+2\cdot5=137$。

類題. 給三根版見 99苗栗高中2。

308. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=1, \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2, \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3$，求 $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$。

答. $\frac{25}{6}$。 (97文華高中)

309. $x, y, z \in \mathbb{R}$，若 $\begin{cases} x+y+z &= -3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= -\frac{1}{3} \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) &= -24 \end{cases}$，求 $x^3+y^3+z^3$ 之值。

答. -27。 (99台中一中)

310. x, y, z 爲實數，已知 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=4$，求 xyz 的最大最小値 。

答. $\max=2, \min=\frac{50}{27}$。 (100南科實中)

解. 由 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=5$。
令 $xyz=k$，則 x, y, z 爲 $x^3-4x^2+5x-k=0$ 之三實根。
令 $f(x)=x^3-4x^2+5x$，由微分可得其相對極值爲 2 和 $\frac{50}{27}$。
有三實根，所以 $\frac{50}{27}\leq k\leq 2$。

311. 設 x, y, z 爲實數，$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=6$，求: (99彰化女中)

(1) x 的範圍。

(2) $x^3+y^3+z^3$ 之最大值。

答. (1) $-2 \le x \le 2$ (2) 6。

312. 已知 $x^2+xy+y^2=3x+3y+9$，若 x^2+y^2 的最大值爲 M，最小值爲 N。求數對 (M,N)。 (100慈濟聯招)

答. $(M,N)=(27,2)$。

類題. 見 99松山高中7。

313. 已知 z_1, z_2 是複數，且 $z_1+z_2=-\cos\theta$, $z_1^2+z_2^2=3-2\csc^2\theta-\sin^2\theta$，其中 $45^\circ \le \theta \le 60^\circ$，若 $|z_1|$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則數對 $(M,m)=$ ________。

答. $(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$。 (99台中二中)

解. $z_1z_2=\frac{1}{2}[(z_1+z_2)^2-(z_1^2+z_2^2)]=\cot^2\theta \Rightarrow z_1, z_2$ 爲 $z^2+\cos\theta z+\cot^2\theta=0$ 之兩根。

所以 $|z_1|=\cot\theta$，在 $\theta=45^\circ$ 時，有最大值 1；$\theta=60^\circ$ 時，有最小值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

314. 已知 x_1, x_2 是方程式 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的兩個實數根，則 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值是多？ (99桃園高中)

答. 18。

315. $y=f(x)$ 是一個二次函數且圖形通過 $(-1,-1)$, $(2,2)$，又圖形與 x 軸所截長度最小，求此二次函數。 (100豐原高中)

答. x^2-2。

316. 設 x_1、x_2 爲二次方程式 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的兩實根，其中 k 爲實數，則 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值爲 ________。 (97全國聯招)

答. 18。

解. 兩實根 $\Rightarrow (k-2)^2-4(k^2+3k+5)\ge 0 \Rightarrow -3k^2-16k-16\ge 0 \Rightarrow -4\le k+4\le -\frac{4}{3}$。

$x_1^2+x_2^2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$。

$\therefore x_1^2+x_2^2 \ge -(4+5)^2+19=18$。

317. 已知實係數方程式 $x^2+2ax+3a^2-4a=0$，α,β 為方程式之兩根。試問當 a 值為何時，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 有極值，並求此極值。 (97潮州高中)

答. $a=3, \max=20$。

318. 設方程式 $x^3-3x^2+ax-b=0$ 有三正根，則 a 的最大值為 M，b 的最大值為 n，求數對 (a,b)。 (99彰化女中)

答. $(a,b)=(3,1)$

319. $\star$ 若實數 x、y 滿足 $\frac{x}{2^{10}+5^3}+\frac{y}{2^{10}+6^3}=1$, $\frac{x}{3^{10}+5^3}+\frac{y}{3^{10}+6^3}=1$，求 $x+y$。 (98南港高工)

答. $2^{10}+3^{10}+5^3+6^3$。

解. $2^{10},3^{10}$ 為 $\frac{x}{t+5^3}+\frac{y}{t+6^3}=1$ 之兩根。
化簡方程式得 $t^2+(5^3+6^3-x-y)t+30^3-6^3x-5^3y=0$。
由根與係數得 $2^{10}+3^{10}=x+y-5^3-6^3 \Rightarrow x+y=2^{10}+3^{10}+5^3+6^3$。

320. $\star$ α,β,γ 為三次方程式 $x^3-x-1=0$ 的三根，則 $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=$ ________。

答. $\pm\sqrt{23}i$。 (101竹山高中)

解. 注意反對稱性，因此將其平方 $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=\sum\alpha^4\beta^2-2\sum\alpha^4\beta\gamma-2\sum\alpha^3\beta^3+2\sum\alpha^3\beta^2\gamma-6\alpha^2\beta^2\gamma^2$。
以上的記號上 $\sum$ 裡是跑對稱項，如 $\sum\alpha^4\beta^2=\alpha^4\beta^2+\alpha^4\gamma^2+\beta^4\alpha^2+\beta^4\gamma^2+\gamma^4\alpha^2+\gamma^4\beta^2$ 有六項，$\sum\alpha^3\beta^3$ 則有三項。
接著計算利用 $x^3=x+1$，及根與係數關係計算 $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$。
$\alpha\beta\gamma=1, \alpha+\beta+\gamma=0,$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2,$
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\alpha+\beta+\gamma+3=3,$
$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha+\beta+\gamma=2,$
$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=5,$
$\alpha^6+\beta^6+\gamma^6=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=5$
$\sum\alpha^4\sum\alpha^2=\sum\alpha^6+\sum\alpha^4\beta^2 \Rightarrow \sum\alpha^4\beta^2=-1$
$\sum\alpha^4\beta\gamma=\alpha\beta\gamma\sum\alpha^3=3,$
$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2=\sum\alpha^6+2\sum\alpha^3\beta^3 \Rightarrow \sum\alpha^3\beta^3=2$,
$\sum\alpha^3\beta^2\gamma=\alpha\beta\gamma\sum\alpha^2\beta$，而 $\sum\alpha^2\sum\alpha=\sum\alpha^3+\sum\alpha^2\beta \Rightarrow \alpha\beta\gamma\sum\alpha^2\beta=-3$。
綜合以上有 $\sum\alpha^4\beta^2-2\sum\alpha^4\beta\gamma-2\sum\alpha^3\beta^3+2\sum\alpha^3\beta^2\gamma-6\alpha^2\beta^2\gamma^2=-1-6-4-6-6=-23$
因此所求 $=\pm\sqrt{23}i$。

評. 這個方法看起來計算很複雜，沒有事先練習過的情況下，大概要花很多時間才能推出那些項。相反的，有思考過的話，就如上面的式子，不是東湊西湊的寫出那些項，而是有規律地計算。

若嫌麻煩，可參考 Mathpro 的討論串，會有更好的解法。

321. 已知 a,b,c 爲相異實數，且 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$。若 $f'(a)f'(b)f'(c)\neq 0$，求 $\frac{a^2}{f'(a)}+\frac{b^2}{f'(b)}+\frac{c^2}{f'(c)}$ 之值。 (98嘉義女中)

答. 1。

解.
$$\begin{aligned}\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)}&=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=\frac{ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}\\&=\frac{ab-c(a+b)+c^2}{(a-c)(b-c)}=1.\end{aligned}$$

評. 不知道在算什麼，算著算著答案就出來了。

322. ⋆ 設 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=45$

(1) 求 $\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=?$

(2) 求 $\frac{a^4}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}=?$ (102中正高中)

答. (1) 1 (2) 27。

解. (1) 令 $\alpha=\frac{c-b}{\Delta},\beta=\frac{a-c}{\Delta},\gamma=\frac{b-a}{\Delta}$，其中 $\Delta=(a-b)(b-c)(c-a)$。

則所求 $=\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2=\frac{(c-b)a^2+(a-c)b^2+(b-a)c^2}{\Delta}$

$=\frac{(c-b)(a^2-b^2)+(c-b+a-c)b^2+(b-a)c^2}{\Delta}=\frac{(a-b)}{\Delta}\cdot\left((c-b)(a+b)+b^2-c^2\right).$

而 $(c-b)(a+b)+b^2-c^2=ca+cb-ba-c^2=c(a-c)+b(c-a)=(c-a)(b-a)$。

故得所求 $=\frac{\Delta}{\Delta}=1$。

(2) 令 $\alpha=\frac{c-b}{\Delta},\beta=\frac{a-c}{\Delta},\gamma=\frac{b-a}{\Delta}$，其中 $\Delta=(a-b)(b-c)(c-a)$。

再令 $x_n=\alpha a^n+\beta b^n+\gamma c^n,\ y=abc$，

則 a,b,c 滿足三次方程式 $t^3-3t^2-18t-y=0\Rightarrow t^3=3t^2+18t+y$。

故有 $x_{n+3}=3x_{n+2}+18x_{n+1}+yx_n$。

而 $x_0=0,\ x_1=\frac{ac-ab+ba-bc+cb-ca}{\Delta}=0,\ x_2=1$

因此 $x_3=3+0+0,\ x_4=3\cdot3+18\cdot1+0=27$。

其中 x_3,x_4 即爲 $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ 和 $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$。

8 二次函數

8.1 圖形、開口

323. 設 $k \in \mathbb{R}$，二次函數 $y = kx^2 + 3x + (2-k)$ 之圖形通過第四象限，則 k 之值的範圍爲 ________。 (100中正高中)

    答. $k < 0$ 或 $k > 2$。

324. 設 $f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3, m$ 爲實數，若 $0 \leq x \leq 4$，則 $f(x) > 0$ 恆成立，求 m 之範圍爲 ________。 (100北港高中)

    答. $-\frac{3}{2} < m < 3$。

325. 當 $0 < x < \frac{1}{2}$ 時，不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 恆成立，則 a 的範圍爲何？ (97竹北高中)

    答. $a \geq -\frac{5}{2}$。

326. 設 m 爲實數，若二次函數 $y = mx^2 + 10x + m + 6$ 的圖形在直線 $y = 2$ 上方，則 m 的範圍爲何？ (99桃園縣高中現職聯招)

    答. $m > -2 + \sqrt{29}$。

327. $f(x) = -kx^2 + (k+1)x + 1$，若 $-1 \leq x \leq 2, -4 \leq f(x) \leq \frac{17}{8}$，則 $k =$ ________。

    答. $k = 2$。 (100陽明高中)

328. 設 $f(x, y) = 2x + 5y^2$，試求在 $x^2 + 2y^2 = 1$ 的限制下，$f(x, y)$ 的最小值。

    答. -2。 (100新北聯招)

329. 已知拋物線 $y = x^2 + (a+1)x + b$ 通過點 $(3, 3)$，其中 a、b 爲固定的實數，且對任意的實數 x，拋物線上的點 (x, y) 恆滿足 $y \geq x$，則拋物線的頂點到原點的距離爲 ________。

    答. $\frac{\sqrt{221}}{4}$。 (99台北縣聯招)

8.2 根

330. $100^x - 10^{x+1} + k = 0$ 的兩根均大於 0，求 k 的解。 (99彰化藝術)

答. $9 < k \le 25$。

解. 令 $t = 10^x, f(t) = t^2 - 10t + k$，則 $t^2 - 10t + k = 0$ 有兩大於 1 之根。
$\Rightarrow f(1) > 0$ 且 $f(5) \le 0 \Rightarrow 9 < k \le 25$。

評. $k = 25$ 時，$x = 10^5$，要算兩個根嗎?

331. 設 a 爲實數，且 $x^2 + ax + (8 - a) = 0$ 的兩根都大於 3，則 a 的範圍爲 ________。

答. $-\frac{17}{2} < a \le -8$。 (101文華高中)

解. 二實根 $\Rightarrow a^2 - 4(8-a) \ge 0 \Rightarrow a \le -8$ 或 $a \ge 4$。

令 $y = x - 3$，則 $y^2 + (6+a)y + 17 + 2a = 0$ 有兩正根 $\Rightarrow \begin{cases} 6+a & < 0 \\ 17+2a & > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{17}{2} < a < -6$。故得 $-\frac{17}{2} < a \le -8$。

332. 設 a, b 爲實數，且 $x^2 - ax + b = 0$ 之兩根爲 x_1, x_2，且 $-1 \le x_1 \le 1, 1 \le x_2 \le 2$。

(1) 設滿足上述條件之 (a, b) 所在區域爲 I，在坐標平面上畫出 I 的圖形。

(2) 設 $u = x - 3y$，其中 $x, y \in I$，求 u 之最大值與最小值。 (99台中二中)

答. (1) 略 (2) $\max = 7, \min = -3$。

解.

(1) 令 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$，則有 $\begin{cases} f(-1) & \ge 0 \\ f(1) & \le 0 \\ f(2) & \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & \ge -1 \\ a-b & \le 1 \\ 2a-b & \ge 4 \end{cases}$。若此聯立不等式成立，則由勘根定理知 $f(x) = 0$ 之兩根必滿足題意。故此聯立不等式之區域即 I。

(2) 線性規劃，得 $(1, -2)$ 處有 $\max = 7$，$(3, 2)$ 處有 $\min = -3$。

333. $x^2 + (a+1)x + a + b + 1 = 0$ 有兩實根 $x_1, x_2, 0 < x_1 < 1 < x_2$，求 $\frac{b}{a}$ 的範圍。

答. $-2 < \frac{b}{a} < -\frac{1}{2}$。 (99建中市內)

334. 已知橢圓 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ 與抛物線 $y = x^2 - m$ 有四個相異交點， (99中正高中)

(1) 求實數 m 的範圍。

(2) 求證：此四個交點共圓。

答. $3 < m < \frac{15}{4}$。

335. 設 $a \in \mathbb{R}$，若二拋物線 $x^2 - 3ax - 16y = 0$ 及 $y^2 - x = 0$ 有四個相異的交點，試求 a 值範圍。 (99育成高中)

答. $a > 4$。

解. 聯立得 $y(y^3 - 3ay - 16) = 0 \Rightarrow \frac{256}{4} - \frac{27a^3}{27} < 0 \Rightarrow a > 4$。(見 卡丹公式)

8.3 弦

336. 設拋物線 Γ : $y^2 = 4x$ 上不同的兩點 M, N 關於直線 L : $x + 2y = 8$ 對稱，求直線 $\overleftrightarrow{MN}$ 的方程式。 (100育成高中代理)

答. $2x - y = 11$。

解. 設 $\overleftrightarrow{MN}$: $2x - y = k$，及兩點坐標 $M(\frac{\alpha^2}{4}, \alpha), N(\frac{\beta^2}{4}, \beta), \alpha \neq \beta$。
由 $\overrightarrow{MN} // (1, 2) \Rightarrow 2 \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} = \alpha - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 2$。
令 P 為 $\overline{MN}$ 之中點，則其 y 坐標為 $\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$，又其在 $x + 2y = 8$ 上，故 P 之坐標為 $(6, 1) \Rightarrow \overleftrightarrow{MN}$: $2x - y = 11$。

評. 此技巧稱設而不求，類似應用見 100台中二中計算6。

評. $\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$ 表示不同的 k 所代表的平行弦中點軌跡落在直線 $y = 1$ 上。

337. 已知 $P(1, -2)$ 為 $y = x^2 - 4x - 2$ 的弦 $\overline{AB}$ 中點，求 $\overline{AB}$ 長為 ________。

答. $2\sqrt{15}$。 (100楊梅高中)

另解. 考慮拋物線 $Q(1, -5)$ 處的切線斜線為 -2。由336.之評，可知 $m_{\overline{AB}} = -2$。解聯立方程式 $\begin{cases} y &= x^2 - 4x - 2 \\ y &= -2x - 4 \end{cases}$ 可得 $x = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{15}$。

338. 過點 $P(1, 2)$ 作一直線 L 與拋物線 $y = \frac{1}{5}x^2$ 交於 A, B 兩點，O 表原點，若 $\angle AOB$ 為直角，求直線 L 的方程式 ________。 (100文華高中代理)

答. $y = -3x + 5$。

評. 從垂直的條件，其實可以導出 $\overline{AB}$ 過 $(0, 5)$。

339. (1) 拋物線：$y^2 = 4cx$，O 為拋物線頂點，直線 L 與拋物線交於兩點 A、B，且 $\angle AOB = 90°$，證明：L 必過 $P(4c, 0)$。

(2) 過 $P(2, 1)$ 做直線 L 交拋物線：$y = \frac{1}{5}x^2$ 於 A、B 兩點，且 $\angle AOB = 90°$，求 L方程式。 (101中科實中)

答. (2) $y=-2x+5$。

340. (1) 抛物線 $\Gamma: y^2=4x$，其中 O 爲原點。P, Q 爲抛物線 Γ 上的兩點，已知 $\overline{OP}\perp\overline{OQ}$，若 $\overrightarrow{PQ}$ 恆過點 A，則點 A 的坐標爲 ________。 (98清水高中)

(2) 設一抛物線 $x^2=5y$ 之頂點 O 與一點 $M(1,2)$，若過 M 之一直線交抛物線於 A, B 兩點且 $\angle AOB=90°$，求 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式與 $\overline{AB}$ 長。 (99高雄市聯招)

(3) 設點 A, B 爲 $\Gamma: y^2=4x$ 上除頂點 O 外兩相異動點，已知 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$，且 M 爲 $\overline{AB}$ 上的點，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，求 M 的軌跡方程式。 (97大里高中)

答. (1) $(4,0)$ (2) $3x+y=5, 5\sqrt{130}$ (3) $(x-2)^2+y^2=4$，但 $(x,y)\neq(0,0)$。

341. $\Gamma: y^2=4x$，F 爲焦點，A、B 在 Γ 上，且 $\overline{FA}\perp\overline{FB}$。又直線 FA 交 Γ 於 A、C，直線 FB 交 Γ 於 B、D，求四邊形 $ABCD$ 的最小值。 (99竹科實中)

答. 32。

342. 抛物線 $y^2=8x$，一直線與此抛物線交於 A、B 兩點，且直線與抛物線所圍成的面積爲定值 $\frac{2}{3}$，則 A、B 中點所形成的軌跡方程式爲 ________。 (100陽明高中)

答. $x=\frac{1}{8}y^2+\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$。

343. 抛物線 $x^2=4cy$ $(c>0)$，一條斜率爲 1 的直線過焦點交此抛物線於 A、B 兩點，自 A、B 兩點對 x 軸作垂線於 D、C 兩點，已知四邊形 $ABCD$ 面積爲 $12\sqrt{2}$，則 $c=$ ________。 (100陽明高中)

答. 1。

解. $x^2=4cy, y=x+c$，聯立得 $x^2-4cx-4c^2=0$，令兩根階 $x_1<x_2$。
梯形 $ABCD$ 面積 $=\frac{x_1^2+x_2^2}{4c}\cdot\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{1}{8c}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)=\frac{1}{8c}\cdot 24c^2\cdot 4\sqrt{2}c=12\sqrt{2}c^2$。
所以 $c=1$。

344. 兩抛物線 $y=x^2-3x+2, y=2x^2-5x+a$ $(a\in R)$ 相交於兩相異點 P, Q，若 $\overline{PQ}=4$，則 $a=$ ________。 (100嘉義女中)

答. 1。

345. 已知抛物線 $y^2=mx$ $(m>0)$，與圓 $(x-2)^2+y^2=3$ 在第一象限交於相異兩點 A、B，且 $\overline{AB}$ 的中點 P 恰好落在直線 $y=x$ 上，求 m 值。 (100鳳山高中)

答. $\frac{7+\sqrt{17}}{2}$。

346. 已知 F 爲拋物線 $\Gamma:\ x^2=4y$ 的焦點，$\overline{AB}$ 爲 Γ 上焦弦，滿足 $\overline{AF}=\lambda\overline{FB}$，過 A、B 分別做切線交於 M 點，

(1) 試證：$\overline{FM}\perp\overline{AB}$

(2) 請問 $\lambda=?$ 時，使 $\triangle ABM$ 面積有最小值。 (97竹北高中)

答. (2) $\lambda=1$。

9 函數圖形的對稱性

9.1 奇、偶函數

347. 已知函數 $f(x)$，對所有的實數 x，有 $f(6-x)=f(2+x)$ 的性質，若 $f(x)=0$ 有 18 個根，則該 18 個根的總和為 ________。 (99萬芳高中)

答. 72。

解. 先找中心：$6-x=2+x\Rightarrow x=2$。令 $x=2+t$ 代入得 $f(4-t)=f(4+t)\Rightarrow x=4$ 為對稱軸，若 $x=4$ 不為根，其根必兩兩成對，對稱於 $x=4$，因此 18 根之總和為 $18\times 4=72$。

348. 設函數 $f(x)$ 對於任一個實數 x 滿足 $f(3+2x)=f(4-2x)$，若方程式 $f(x)=0$ 有六個根相異實根，則此六個相異實根之和為 ________。 (97家齊女中)

答. 21。

349. 已知函數 $f(x+1)$ 及 $f(x-1)$ 都是奇函數，且 $f(2)=3$ 。求 $f(-50)$ 的值。

答. 3。 (99南港高工)

350. 若 $y=f(x)$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上的函數，圖形對稱於 $(-\frac{3}{4},0)$，若對任意實數 x，恆有 $f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$ 且 $f(-1)=1, f(0)=-2$，則 $\sum\limits_{k=1}^{2011} f(k)=$ ________。

答. 1。 (100全國聯招)

351. 兩函數 $y=\log_2(11x^2+2004)$ 和 $y=3^{x^2+a}-16$ 之圖形交於 A, B 兩點，若 $\overline{AB}=4$，則 $a=$ ________。 (100台中二中)

答. -1。

352. 設 $f(x)=3^x+3^{-x}$ 與 $g(x)=ax^2$ 的圖形，交於 A, B 兩點，已知 $\overline{AB}=6$，則 $a=$ ________。 (100嘉義高中)

答. $\frac{730}{243}$。

評. 四個交點！！！！

9.2 反函數

353. 已知 $a+\log a=10, b+10^b=10$，則 $a+b$ 之值為 ________。 (99萬芳高中代理)

答. 10。

解. 考慮 a 為函數 $y=\log x$ 與 $y=10-x$ 的圖形交點 x 坐標；考慮 b 為函數 $y=10^x$ 與 $y=10-x$ 的圖形交點 x 坐標。
由函數及反函數圖形的對稱性 $b=\log a$ 且 $(a,\log a)$ 在直線 $y=10-x$ 上，故 $a+b=10$。

354. (1) 若 $\begin{cases} x+\log x &= 100 \\ y+10^y &= 100 \end{cases}$，則 $x+y=$ ________。 (100成淵高中)

(2) 設 $(\log x)+x-4=0$ 之實根為 α，$10^x+x-4=0$ 之實根為 β，則 $\alpha+\beta=$ ________。 (100南港高工)

(3) 若 α 為 $2^x+x-98=0$ 的根, β 為 $\log_2 x+x-98=0$ 的根，則 $\alpha+\beta=$ ________。

(4) 已知 $3^x=4-x$ 有一實根 α，$\log_3 x=4-x$ 有一實根 β，則 $\alpha+\beta=$ ________。

答. (1)100 (2) 4 (3) 98 (4) 4。 (3)98嘉義高中、(4)97中興高中

355. ⋆ 已知 $\begin{cases} \tan\alpha+\log_3(3\tan\alpha+6)=2 \\ \tan\beta+3^{\tan\beta-1}=4 \end{cases}$，求 $\tan\alpha+\tan\beta$。 (101建國中學2招)

解. 令 $a=\tan\alpha+2$，則 $a+\log_3 a=3\Rightarrow 3-a=\log_3 a$；令 $b=\tan\beta-1$，則 $b+1+3^b=4\Rightarrow 3^b=3-b$。由反函數圖形之對稱性得 $a+b=3\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta=2$。

9.3 其它

356. 試求直線 $y=4x$ 在第一象限中，落在曲線 $y=6\pi\sin^2 x$ 下方部分的所有線段長的總和為 ________。 (101台中女中)

答. $\frac{3\sqrt{17}}{4}\pi$。

解. 注意 $(\frac{3}{4}\pi,3\pi)$ 為兩函數圖形在 $[0,\frac{3}{2}\pi]$ 的對稱中心。故在其中，若有某段在下方，必有相對旋轉 180° 等長在上方的另一線段。因此上下各佔一半，所求$=\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{3}{2}\pi)+(6\pi)^2}=\frac{3}{4}\sqrt{17}\pi$。

357. 若 $f(x)=(x-3)^2-1$，求 $f(|x|)=|f(x)|$ 的實數解。 (100台南二中)

答. $0\le x\le 2$ 或 $x\ge 4$。

358. 橢圓 $\frac{(x-21)^2}{21}+\frac{(y-100)^2}{100}=2100$ 在第一、二、三、四象限內的面積依次爲 R_1, R_2, R_3, R_4，則 $R_1-R_2+R_3-R_4=$ ________。 (99彰化女中)

答. 8400。

359. 設橢圓 $\Gamma:\ \frac{(x-3)^2}{98^2}+\frac{(y-16)^2}{2009^2}=1$，且其內部於第一、二、三、四象限內所圍區域面積依次爲 R_1, R_2, R_3, R_4，則 $R_1-R_2+R_3-R_4=$ ________。 (100香山高中)

答. 192。

360. 若實係數三次多項式函數 f 有極大值 $f(0)=10$ 及極小值 $f(6)=2$，
則 $\int_0^6 (f(x)+2f'(x)f''(x))\,dx$ 之值爲 ________。 (100華江高中)

答. 36。

解. 平移，令 $g(x)=f(x+3)-6$，則 $g(x)+2g'(x)g''(x)$ 奇函數
$\Rightarrow \int_{-3}^{3}(g(x)+2g'(x)g''(x))dx=0$。所以 $\int_0^6 f(x)+2f'(x)f''(x)dx=36$。

10 排列組合

10.1 排組、機率、統計

重複組合、重複排列

361. $1,2,3,\ldots,20$ 挑出 x_1, x_2, x_3 三個數字，且 $x_1 < x_2 < x_3$，求 x_1 與 x_2 至少差 3，x_2 與 x_3 至少差 5 的機率爲 ________。 (100文華高中代理)

答. $\frac{91}{285}$。

解. 令 $a = x_1 - 1$, $b = x_2 - x_1 - 3$, $c = x_3 - x_2 - 5$, $d = 20 - x_3$, 可轉換成 $a+b+c+d = 11$ 之非負整數解。
$\frac{H^4_{11}}{C^{20}_3} = \frac{C^{14}_{11}}{C^{20}_3} = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{20\cdot 19\cdot 18} = \frac{91}{285}$。

評. 見縫插針: 兩兩中間插入 2, 4 個數，剩下 4 個縫和 $(20-2-4-3)$ 個數，其排序即爲數字，故有 H^4_{11} 方法。

362. 若 x, y, z 爲整數，$0 \le x \le 45$，$1 \le y \le 47$，$2 \le z \le 49$，則滿足 $x+y+z = 50$ 的解 (x,y,z) 共有 ________ 組。 (100麗山高中)

答. 1172。

363. 用 $0,1,2,3,\ldots,8,9$ 等十個數字做成五位數，此五位數滿足下列兩條件:

(1) 萬位數字 $\le$ 千位數字 $\le$ 百位數字 $\le$ 十位數字 $\le$ 個位數字

(2) 此五位數爲偶數

則可做成多少個滿足此兩條件的五位數？ (99高雄市聯招)

答. 496。

364. 主人宴客，刻意安排 10 個互不認識的客人一同圍坐一圓桌，希望客人能互相認識，不料席間每位客人都只與相鄰的人交談認識。飯局後主人從中隨意挑選四人，試求四人皆互不認識的機率。 (100香山高中)

答. $\frac{H^4_2\cdot 3!\cdot 6!}{9!} = \frac{5}{42}$。

365. 一排有 25 張椅子的座位，讓甲、乙、丙、丁四人去坐，一人選坐一張椅子。若要求甲、乙、丙、丁四人中任意兩人之間皆至少有 3 張空椅子，則此四人不同的入坐方法有 ________ 種。 (100桃園高中)

答. $H^5_{12}\cdot 4! = 43680$。

366. 將 12 張相同椅子排成一列，甲乙丙丁戊己庚七人分成三組入座，三組人數各爲 1 人、3人、3 人，則同組相鄰，不同組不相鄰之坐法有 ________ 種。 (99台中一中)

答. $H^4_{12-7-2} \cdot 3 \cdot 7! = 302400$。

367. 有 8 位女生與 25 位男生圍成一圓圈，在任 2 位女生中間至少有兩位男生，其排列方法數爲 $\frac{a!b!}{c!}$ 種 $(a < b)$，則序數對 $(a, b, c) =$ ________。 (99台中二中)

答. $(16, 25, 9)$。

368. 設有 3 位男生，8 位女生圍一圓桌而坐，若任 2 位男生之間至少有 2 位女生，則共有 ________ 種坐法。 (99中正高中)

答. 483840。

369. 有 21 個相同球放入 3 個不同袋子，每袋至少一球，則滿足「任二袋球數和必大於第三袋球數」之放法有 ________ 種。 (99安樂高中2招)

答. 55。

370. 從 2700 的正因數中任取 a, b, c 三個，使得 a 是 b 的因數，b 是 c 的因數的機率 $=$ ________。 (99台中一中)

答. $\frac{125}{2196}$。

解. $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$。$0 \leq x \leq y \leq z \leq 2$ 有 $H^4_2 = 10$ 組整數解；$0 \leq x \leq y \leq z \leq 3$ 有 $H^4_3 = 20$ 組整數解。所以所求 $= \frac{10^2 \cdot 20}{36^3} = \frac{125}{2196}$。

371. 某百貨公司想在周年慶時辦理抽獎遊戲，辦法如下：設置 3 個不同的抽獎箱，每個抽獎箱中至少有 1 個球且只有 1 個紅球，其它皆爲白球，而從 3 個抽獎箱都抽出紅球者即爲中 獎，百貨公司希望這遊戲中獎的機率是 $\frac{1}{200}$，試問 3 個抽獎箱內白球球數的配置有 ________ 種方法。 (100文華高中)

答. 60。

解. $200 = 2^3 \times 5^2$。所以每箱的球數爲 $2^a \times 5^b$。指數之和分別爲 3, 2。
故所求$= H^3_3 \cdot H^3_2 = 60$。

評. 隱藏在指數律，化乘爲加的重複組合。

372. 假設 a, b, c 爲相異正整數，則滿足 $a \cdot b \cdot c = 2310$ 之集合 $S = \{a, b, c\}$ 有 ____ 個。

答. 40。 (97家齊女中)

373. $\star$ 若多項式 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{11}$ 的展開式爲 $1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{43}x^{43}+x^{44}$，試求 a_6。 (101中科實中)

答. 7887。

解. 考慮 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{11}$ 展開式中 x^6 的係數爲 $H_6^{11}=8008$。
而其比原本多出 $1^{10}\cdot x^6$ 和 $1^9\cdot x\cdot x^5$，故 $8008-11-110=7887$。

分類討論

374. 設 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{2n}x^{2n}$ 試求 a_3 之值。(用 n 表示)

答. $\frac{n(n-1)(n+4)}{6}$。 (99大安高工)

375. 袋中有 55 個顏色及大小均相同的球，僅編號不同，分別是 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，$\ldots$，10 號球 10 個，今自袋中任取 4 球，則取出的情形有 ____ 種。

答. 649。 (100彰化女中)

376. 坐標平面上，自 $A(0,0)$ 沿方格之邊走到 $(6,4)$，以走捷徑方式(只能往上、往右)，恰轉三次彎(行駛方向恰改變三次)的方法數有 ________ 種。 (99嘉義高工)

答. 30。

377. 將「南港愛我，我愛南港」8 個字全取排成一列，其中「南」與「港」兩字 不相鄰之排法有 ________ 種。 (100南港高工)

答. 660。

解. 先考慮南港南港四字排列有 6 種方法：南南港港、南港港南、南港南港，及南港二字交換等三種。
其餘四字視爲相同插入使得南南、港港間隔開有 $2\cdot(H_3^5+H_2^5+H_1^5)$ 方法。
每種方法再愛我我愛之排列，故總共有 $2\times(H_3^5+H_2^5+H_1^5)\times\frac{4!}{2!2!}=660$。

378. 將『中科實中中部科科第一』十個字重新排成一列，若要求相同字不能相鄰， 則排列數 $=$ ________。 (101中科實中)

答. 24240。

379. 五對夫婦環狀排列，恰三對相鄰的方法數爲 ________。 (99建中市內)

答. 26880。

解. 固定兩對環排有 $\frac{4!}{4} = 6 = 4 + 2$，其中 2 對夫婦相鄰有 4 種，2 對皆不相鄰有 2 種。

欲使此兩對夫婦不相鄰，將其它三對相鄰的夫婦插入其中間隔。

因此所求 $= C^5_2 \cdot (4 \cdot H^4_1 + 2 \cdot H^4_3) \cdot (3! \cdot 2^3) = 26880$。

380. 共有 12 個位子，甲乙丙丁四個人坐位子且兩兩不相鄰，若第六個位子一定要有人坐，求坐法有幾種。 (100南科實中)

答. 960。

381. 投擲一公正銅板 6 次，試求「在投擲過程中，曾經連續出現兩次正面」的機率 = ________。 (100麗山高中)

答. $\frac{43}{64}$。

另解. 遞迴解見 99中壢高中3。

382. 投擲一骰子四回出現點數依次為 a, b, c, d，若在直角坐標平面上有兩點 $P(a, b)$, $Q(c, d)$，若兩點距離 X，求 $X > \sqrt{2}$ 之機率。 (100基隆高中)

答. $\frac{65}{81}$。

383. 小綠參加大學指定科目考試時，題目卷中有關多選題得分敘述如下—「多選題的每題有四個選項，其中至少有一個是正確的選項。請選出正確的選項，畫記在答案卡之解答欄。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 8 分，答錯一個選項者得 4 分，所有選項均未作答或答錯多於一個選項者，該題以 0 分計算。」若小綠此題有作答，請你算算看她此題得分的期望值為 ________ 。 (101北一女中2招)

答. $\frac{344}{225}$。

解. 小綠有作答的情形有 15 種，正確答案的可能亦有 15 種。

完全正確的可能有 15×1；小綠畫記一個選項，恰答錯一選項之可能有 4×3 (答案不能四個都錯)；小綠畫記二個以上選項，恰答錯一選項之可能有 11×4。

所以該題期望值為 $\frac{15\times1\times8+11\times4\times4+4\times3\times4}{15\times15} = \frac{344}{225}$。

384. 在坐標空間中，一正立方體的八個頂點分別為 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ 與 $(0, 1, 1)$。若 A、B 分別為此正立方體兩相異稜邊的中點，則 $\overrightarrow{AB}$ 共有幾種可能? (100鳳新高中代理)

答. 54。

385. 以一個正 24 邊形的頂點任取三點所組成的三角形中，三內角均大於 30 度的三角形有幾個。 (97台中一中)

答. 440。

容斥原理

386. $AAABBCCDEF$ 共十個字母排成一列，同字母不相鄰的排列方法有 ________ 種。

答. 47760。 (99文華高中)

解. E_A : 三 A 分離；E_B : 兩 B 相鄰；E_C : 兩 C 相鄰。
所求 $|E_A| - |E_A \cap E_B| - |E_A \cap E_c| + |E_A \cap E_B \cap E_c| = \frac{7!}{2!2!} \cdot C^8_3 - \frac{6!}{2!} \cdot C^7_3 - \frac{6!}{2!} \cdot C^7_3 + 5! \cdot C^6_3 = 47760$。

387. 將 24 顆相同的球投入甲，乙，丙三個箱子，每一個箱子至少有一顆球且各箱子的球數均不相同，則有 ________ 種方法數。 (98台北縣聯招)

答. $H^3_{21} - 11 \cdot 3 + 2 = C^{23}_{21} - 31 = 222$。

388. 將「a, a, b, b, c, c, d, e」八個字全取作直線排列，其中同字不得相鄰的排列法共有幾種？

答. 2220。 (97彰化藝術)

389. 以正六面體的頂點爲頂點，可以構成多少個，不同的三角錐？ (97楊梅高中)

答. 58。

解. 任取四點有 C^8_4；而四點共平面者有 6 個表面及 6 個傾斜 $45°$ 的面。故 $C^8_4 - 12 = 58$。

其它例題

390. (1) 一袋中有三個紅球，四個綠球，五個白球，每球被取機率相同，每次取一球，取後不放回，紅球最先被取完的機率爲 ________。 (99嘉義高工、100金門農工)

(2) 已知袋中有黃球 3 個，綠球 4 個，紅球 5 個，每次取 1 球，取後不放回，直到取完所有球爲止，則紅球最先取完的方法有 ________ 種。 (100松山家商)

(3) 一袋中有 9 個紅球，10 個白球和 11 個黑球，今由袋中逐次取出一球並依序排成一列，則 (100麗山高中)

i. 最先被全部取出依序爲紅球，白球，黑球的排列情形有 ________ 種。(可用 ! 階乘表示)

ii. 最先被全部取出依序爲紅球，白球，黑球的機率爲 ________。

(4) 袋中有 3 個紅球，2 個黑球與 4 個黃球，設每一球被取到的機會相等，今由袋中一 次任取一球，每次取完後不放回，則紅球先取完的機率爲？ (100玉井工商、99文華2招代理)

(5) 袋中有紅球 5 顆，白球 3 顆，黑球 4 顆，每顆球被取到的機率相等，且取出後不放回，連續取球，黑球先取完的機率爲何？ (97文華高中)

答. (1) $\frac{25}{56}$ (2) 6545 (3) $\frac{29!}{19\times 9!\times 9!\times 10!}$, $\frac{11}{57}$ (4) $\frac{32}{105}$ (5) $\frac{20}{63}$。

提示(1) 紅先取完的情況，依先後取完的序可分爲：紅綠白、紅白綠。

評. 考到爛了!

391. 設 $x=5$，則 $(1+x)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15} C_k^{15}x^k$ 的展開式中，當 $k=$ ________ 該項的值最大。

答. 13。 (100育成高中代理)

評. $(1+5)^{15}=6^{15}(\frac{1}{6}+\frac{5}{6})^{15}$，視作二項分配，平均值是 12.5，答案應該在它附近。

392. 求 $C_k^n 2^k$ 在 k 爲何值時有最大值？(n 爲常數) (97竹北高中)

答. $\left[\frac{2n+2}{3}\right]$，而當 $\frac{2n+2}{3}$ 恰爲正整數時，$k=\left[\frac{2n+2}{3}\right]-1$ 亦有最大值。

提示. $\left(C_k^n 2^k\right) / \left(C_{k-1}^n 2^{k-1}\right)$。

393. 從$\{1,2,4,5,6,7,8,9,0\}$ 選出四個數字(可重複)所排列成的四位正整數之中，有幾個爲 15 的倍數。 (97台中一中)

答. 432。

解. 注意依除以 3 餘數分類: $\{0,6,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$，3 組數一樣多。依個千百十之順序填入得 $2\times 8\times 9\times 3=432$。

394. 以 $0,1,2,3,4,5$ 等 6 個數字，作成一個三位數，數字可重複，則此三位數爲 3 的倍數有 ________ 個。 (98新營高工)

答. 60。

395. 編號 $1,2,3,\ldots,9$ 的卡片 9 張，甲從其中任選 3 張，乙再從剩下的卡片任選 3 張，並且依下列規則比大小: 第一回合: 兩人手中最大號碼的卡片比較數字大小;
第二回合: 兩人手中第二大號碼的卡片比較數字大小;
第三回合: 兩人手中最小號碼的卡片比較數字大小;
每回合數字大者該回合獲勝，三回合獲勝較多者爲贏家。請問甲有兩回合獲勝的情形有幾種? (100彰化女中)

答. 420。

評. 其實甲獲勝 0, 1, 2, 3 回合的情形都一樣多。

396. 將 $1,2,3,\ldots,52$ 這 52 個正整數排成一個數列 $\langle a_n\rangle$，使其中第一個大於 a_{16} 的項是 a_{36}，則這樣的數列共有 ________。 (99桃園農工)

答. $\frac{52!}{36!}\cdot 34!$。

397. 投擲兩個 6 面的公正骰子，求其點數和爲 4 會出現在點數和爲 7 之前的機率。

答. $\frac{1}{3}$。 (99桃園縣高中新進聯招)

評. 所求即在「第一次出和爲 4 或 7 的情況下」，其和爲 4 的機率。

398. 將 20 個人分組，若平分成 5 組、每組 4 人的分法有 a 種，而平分成 4 組、每組 5 人的分法有 b 種，則 $\frac{a}{b}$ 之值爲 ________。(請以最簡分數表示) (100華江高中)

答. $\frac{125}{24}$。

399. A 骰子點數 $1,2,3,4,5,6$; B 骰子點數 $1,1,2,2,3,3$; C 骰子點數 $1,2,2,3,3,3$，投擲 A,B,C 骰子各一次，請問點數和 ________ 時出現的機率最高。 (98清水高中)

答. 7 或 8。

解. $A=1$ 且點數和 3–7 機率分別爲 a_1,a_2,a_3,a_4,$a_5>0$, 其餘點數和機率皆爲 0。
$A=2$ 且點數和 4–8 機率分爲 a_1,a_2,a_3,a_4,$a_5>0$, 其餘點數和機率皆爲 0。
...至 $A=6$ 皆有相同之分析。

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
 & & & & & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\
 & & & & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \\
 & & & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & \\
 & & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & \\
 & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & \\
+) & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & & \\
\hline
 & p_{12} & p_{11} & p_{10} & p_9 & p_8 & p_7 & p_6 & p_5 & p_4 & p_3
\end{array}
$$

Table 1: 總和點數 3–13 之機率

因此總和爲 $7, 8$ 時機率最大爲 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{6}$，其餘皆小於此。

400. 當投擲 n 個公正骰子一次，點數和爲 2008 的機率與點數和爲 S 的機率相等，則 S 的最小值 ________。 (97全國聯招)

答. 337。

解. $6n \geq 2008 \Rightarrow n \geq 335$。注意擲 n 個骰 2008 與 $7n - 2008$ 機率相同。而 $n = 335$ 時，$7n - 2008 = 337$；$n \geq 337$ 時，點數和皆 337 以上。而 $n = 336$, 易驗點數和 336 之機率與 2008 不同。

401. 一籃球比賽從預賽決定了前 5 名進入決賽，今決賽的方式爲：第 5 名和第 4 名比，贏的再 和第 3 名比，依次比下去，請問決定複賽名次的排序方法有 ________ 種。

答. 16。 (98清水高中)

402. 斜率爲 $\frac{-13}{21}$ 的直線，在第一象限內恰過 5 個格子點，這樣的直線有 ________ 條。

答. 273。 (99建中市內)

403. A 商店販賣彩券，彩券上的號碼恰由 0001 至 1000。某甲至 A 商店購買彩券 1 張，若欲滿足下列之期望，則各有多少種買法？ (99士林高商)

(1) 彩券上有「8」這個數字。

(2) 數字由左至右，一個比一個大。

(3) 任 2 個鄰數字，左邊的都不會比右邊的大。

答. (1) 271 (2) 84 (3) 219。

404. 有七枚硬幣置於黑箱中的，其中有一枚兩面都是人頭，一枚兩面都是字，其餘五枚一面是人頭一面是字；今將手伸入箱中抓出一枚硬幣，打開手掌發現一面是人頭，試問該枚硬幣另一面也是人頭的機率是 ________。 (99中壢家商)

答. $\frac{2}{7}$。

405. 一位小孩在地面上 A, B, C, D, E，等 5 個點跳動，且每次跳動一定跳至相異於起跳點的位置且每一點機會均等。現在這位小孩在 A 點處，若已知這小孩跳動 4 次後跳在 A 點處，求他四次中恰有兩次跳到 A 點的機率。 (101台中二中2招)

答. $\frac{4}{13}$。

406. 連續擲出一個公正的正六面體骰子 n 次，將前 n 次出現的點數依序寫在小數點的後面，得到一個實數 a_n，例 $a_1 = 0.4, a_2 = 0.43, a_3 = 0.435, \ldots$，對於實數 k，若符號 $p_n(k)$ 代表「$a_n < k$ 的機率」，試求: (1) $p_{2011}(\frac{1}{7})$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\frac{41}{333})$。

答. (1)$\frac{5}{54}$ (2) $\frac{8}{215}$。 (100彰化藝術暨田中高中)

解. (1) $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$，所以 $p_{2011}(\frac{1}{7}) = p_3(\frac{1}{7}) = \frac{1\cdot(3\cdot6+1\cdot2)}{6^3} = \frac{5}{54}$。

(2) $\frac{41}{333} = 0.\overline{123}$。$P(a_3 < 0.123) = \frac{1\cdot(1\cdot6+1\cdot2)}{6^3} = \frac{1}{27}$ $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\frac{41}{333}) = \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{216}} = \frac{8}{215}$。

407. $a, b \in \mathbb{R}$，若 $ax + by = 1$ 與 $x^2 + y^2 = 50$ 僅有整數解，求數對 (a, b) 有多少組?

答. 72。 (100香山高中)

408. $\star$ 有 7 張卡片: 3 張相異的為 $\boxed{\text{P}}$, $\boxed{\text{Q}}$, $\boxed{\text{R}}$, 4 張相同的為 $\boxed{\text{T}}$, $\boxed{\text{T}}$, $\boxed{\text{T}}$, $\boxed{\text{T}}$。另有 4 只紙袋: 灰色紅色的各 1 只，其餘為相同的黃色紙袋。若將 $\boxed{\text{P}}$, $\boxed{\text{Q}}$, $\boxed{\text{R}}$ 這 3 張卡片全部任意放入上述 4 只紙袋的方法數為 a，將 7 張卡片全部任意放入上述 4 只紙袋的方法數為 b，則數對 (a, b) 為 ________。 (102北一女中2招)

答. $(36, 1156)$。

解. $a = \frac{4^3-2^3}{2} + 2^3 = 36$。
$b = (36-8)\cdot H^4_4 + 8\cdot\left[\frac{H^4_4-(H^2_4+H^2_2+1)}{2} + (H^2_4 + H^2_2 + 1)\right] = 1156$。
其中 $H^2_4 + H^2_2 + 1 = 9$ 為四 T 放入四袋且使兩黃袋有相同的 T 的方法數。

409. 在正 $\triangle$ 內任取一點，向三邊做垂直線段，則此三垂直線段長可作為一 $\triangle$ 三邊長的機率為 ________。 (100苑裡高中)

答. $\frac{1}{4}$。

解. 假設高$= 1$，三垂線段長分別為 a, b, c，則 $a + b + c = 1$，由此可將三角不等式之條件轉為 $a, b, c < \frac{1}{2}$。即為三中點所形正三角形區域，故所求機率 $= \frac{1}{4}$。

10.2 期望值

410. 一袋中有十顆球，編號分別爲 $1,2,3,\ldots,10$ 的球各一顆。今自袋中隨機一次取出兩球，則所得號數乘積的期望值爲 ________。 (100成淵高中)

答. $\frac{88}{3}$。

類題 100桃園新進聯招4。

411. 從 $1,2,3,\ldots,9$ 等 9 個數中，每次取出 3 個不同的數字組成三位數，試求其中能被 3 整除的所有三位數之總和。 (100台南二中)

答. 99900。

解. 可分別計算百位數字爲 $1,2,3$，皆爲 20 個。因此 $1\sim 9$ 每個數字在個、十、百分出現 20 次。所以 $=111\times(1+2+3+\ldots+9)\times 20=99900$。

評. 加法交換律。

412. 連續投擲一個均勻骰子二次，第一次出現 x 點，第二次出現 y 點，求 $\frac{x+y-|x-y|}{2}$ 的期望值。 (97松山家商)

答. $\frac{91}{36}$。

413. 袋中有 2008 顆球，分別編號爲 $1,2,3,\ldots,2008$，設每球被取中的機率相同，今從袋中隨機取出三顆球，設三顆球之中編號最大者爲 T，求 T 之期望值。

答. $\frac{6027}{4}$。 (99屏東女中、97台中一中)

解. 對 $3\le k\le 2008, P(T=k)=\frac{C_2^{k-1}}{C_3^{2008}}$。

所以 $ET=\sum_{k=3}^{2008}\frac{kC_2^{k-1}}{C_3^{2008}}=\sum_{k=3}^{2008}\frac{3C_3^k}{C_3^{2008}}=\frac{3}{C_3^{2008}}C_4^{2009}=\frac{6027}{4}$。

類題. 此求和技巧見 100中壢高中9。

414. (1) 已知甲袋中有 2 個 10 元硬幣，乙袋中有 3 個 5 元硬幣，今同時從甲，乙袋中各任取 1 個硬幣互換，經長期互換多次後呈現穩定狀態，則乙袋中金額的期望值爲 ________ 元。 (100南港高工)

(2) 甲袋本有兩張一百元鈔，乙袋有三張五十元鈔，若以甲乙兩袋互換一張鈔票爲一局，試問：在長久操作後，甲袋的錢的期望值爲何？ (99中壢高中)

答. (1) 21 (2) 140。

415. (1) 已知 A 袋中有 3 個 10 元硬幣，B 袋中有 2 個 5 元硬幣，今從 A 袋任取一個硬幣放入 B 袋，再由 B 袋任取一個硬幣放入 A 袋。若進行的次數夠多，試問 A 袋中有 2 個 10 元硬幣和 1 個 5 元硬幣的機率會趨近何值？ (100慈濟聯招)

(2) 甲袋中有 1 紅球 3 白球，乙袋中有 4 白球，每次每球被取到的機會均相等，若自甲袋中取一球放入 乙袋，再從乙袋中取一球放回甲袋，此稱爲一回合，再長久的操作之下，紅球留在甲袋的機率爲何？ (99大安高工2招)

(3) 設甲箱內有 2 白球，乙箱內有 3 紅球，現在每次各自箱中隨機取一個球交換，若經過長期達穩定狀態後， 求有 2 紅球在甲箱內的機率 = ________。

答. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{10}$。 (99中興高中)

另解(3) 穩態時各種組合(將每個硬幣視爲相異)出現的機率應相同，故所求 $= \frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{3}{10}$。

評. 這個另解當然可以套到上一題。

416. 同時擲三個公正骰子，最大點數(不是指點數和)的期望值爲 ________。 (99嘉義高工)

答. $\frac{119}{24}$。

解. $P(X \leq k) = \frac{k^3}{6^3} \Rightarrow P(X \geq k) = 1 - \frac{(k-1)^3}{6^3}$。
由 Fubini 定理得 $EX = \sum P(X \geq k) = 6 - \frac{1}{6^3} \cdot (\frac{6 \cdot 5}{2})^2 = \frac{119}{24}$。

417. 箱子中有大小相同紅、黃、藍三種顏色的球共 200 個，若一次取兩球，則取到紅球個數的期望值是 0.6 球。 若一次取五球，則取到黃球個數的期望值是 1.2 球。則箱子中共有幾個藍色球？ (100新竹高工)

答. 92。

418. 將 4 個球全部投入 3 個不同的袋子中，每次投一球，連續投 4 次，則空袋子個數的期望值 ________。 (99中興高中)

答. $\frac{16}{27}$。

解. 三袋名之爲甲、乙、丙袋，則甲袋空的機率爲 $\frac{2^4}{3^4}$，乙、丙袋亦然。故所求 $= 3 \cdot \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{27}$。

419. 一袋中有 m 個白球與 n 個黑球，個袋中一次取一球，取後不放回，直到取完所有白球爲止，求所取球數的期望值。 (97大里高中)

答. $\frac{C_{m+1}^{m+n+1}}{mC_n^{m+n}} = m + \frac{mn}{m+1}$。

420. $\star$ A 在方格的左下角，B 在方格的右上角，各有 9 個→與↑，求 A 到 B 走捷徑轉彎數之期望值。 (99高雄高中)

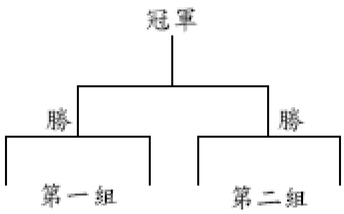
答. 9。

421. 有 3 個「$+$」，4 個「$-$」，排成一列。若一列中一個「$+-$」或一個「$-+$」我們說：有一個「變號」。問 3 個「$+$」，4 個「$-$」排成一列，變號個數的期望值？

答. $\frac{24}{7}$。 (99彰化女中)

評. 以上三題，皆可用 418 題：4 球 3 袋之解法。

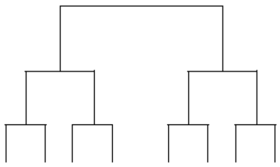
422. 某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽。如右圖：根據過去的紀錄，所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均為 0.5。則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為 ____。 (97中興高中)



答. $\frac{1}{C^4_2} = \frac{1}{6}$。

評. 隨機抽籤、實力均等，那張圖沒有用。

423. 由 A, B, C, D, E, F, G, H 八隊作單淘汰賽，如附圖安排賽程，若此八隊的實力相當，則 A, D 兩隊在冠亞軍相遇的機率為 ________。 (99彰化女中)



答. $\frac{1}{C^8_2} = \frac{1}{28}$。

評. 此答案與賽程表無關。

424. 有甲、乙、丙等 14 人出遊，欲住進兩間 4 人房、兩間 3 人房，問甲乙丙三人同房的機率為 ________。 (99桃園高中)

答. $\frac{5}{182}$。

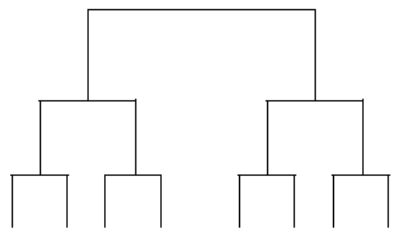
解. 考慮任意固定三人同房的機率皆相同，令其為 p。設 $X = 1$, 三人同房；$X = 0$ 三人不全同房。

任意選三人，皆有相對之 X，這些 X 之總和為 $2C^4_3 + 2C^3_3 = 10$。

總和之期望值為 $C^{14}_3 p$，所以 $p = \frac{10}{C^{14}_3} = \frac{5}{182}$。

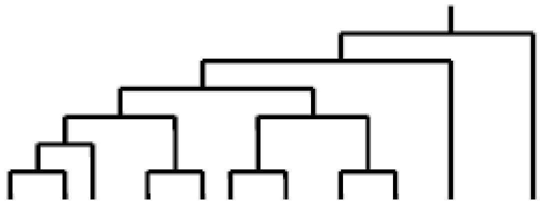
評. 利用對稱性即期望值的加性，避開排組計算。

425. 有甲、乙等 8 隊參加足球賽，比賽賽程如右表，採單敗淘汰制。假設這 8 隊的實力相當，試問整個賽程當中，甲隊和乙隊可能遭遇對打的機率 ________。 (99中正高中)



答. $\frac{1}{4}$。

426. 某年的大醫盃羽球賽共有 11 所大學報名，台大和陽明也在其中，而每所學校的實力均等，但神奇的是，該年的賽程表如下，而每個學校都還沒有抽籤。請問，冠亞軍決賽時是台大和陽明對決的機率是多少？ (97台南女中)



答. $\frac{1}{C_2^{11}} = \frac{1}{55}$。

427. 若 X 的動差生成函數(moment generating function)是 $M(t) = \frac{2}{7}e^t + \frac{1}{7}e^{2t} + \frac{3}{7}e^{3t} + \frac{1}{7}e^{4t}$。求 X 的期望值及變異數。 (100家齊女中)

答. $\frac{54}{49}$。

解. $EX = M'(0) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{9}{7} + \frac{4}{7} = \frac{17}{7}$。$EX^2 = M''(0) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{27}{7} + \frac{16}{7} = 7$。$\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = 7 - \frac{289}{49} = \frac{54}{49}$。

428. 已知連續隨機變數 X 的機率密度函數(Probability Density Function) $f(x)$ 爲

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \le 0 \text{ or } x \ge 1 \end{cases}$$

且 X 的期望值 $E(X) = \frac{1}{2}$, X 的變異數 $V(X) = \frac{3}{20}$，則 $a + b + c =$ ________。

答. 3。 (98師大附中)

429. 某一老鼠走迷宮的遊戲中，假設迷宮有三個門，老鼠走進這三個門的機率都相等，且假設老鼠不去記憶走過的門與路徑。如果走進 A 門，則老鼠在 3 個小時後可以走出迷宮；如果走進 B 門，則老鼠經過 2 個小時後又走回原地；如果走進 C 門，則老鼠經過 4 個小時後又走回原地。求這隻老鼠要走出迷宮所花時間的期望值。 (99左營高中)

答. 9。

解. $x = \frac{3}{3} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+4}{3} \Rightarrow x = 9$。

430. 袋中有 5 個大小相同的球，其中 2 個紅球，3 個白球。今有一個遊戲其規則如下，至袋中一次取一球，取後放回，若連續取出 3 次紅球，則遊戲結束。求此遊戲結束的取球期望次數。 (100桃園新進聯招)

答. $\frac{195}{8}$。

解. 以遞迴方式計算期望值，解聯立 $\begin{cases} x &= \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + 1 \\ y &= \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}z + 1 \\ z &= \frac{3}{5}x + 1 \end{cases}$ 得 $(x, y, z) = (\frac{195}{8}, \frac{175}{8}, \frac{125}{8})$。

所以期望次數爲 $\frac{195}{8}$。

431. 某校高一第一次段考數學成績不太理想，多數同學成績偏低；考慮到可能是同學們適應不良所致，數學老師決定將每人的原始成績取平方根後再乘以 10 作爲正式記錄的成績。今隨機抽選 100 位同學，發現調整後的成績其算術平均數爲 65 分，標準差爲 15 分；假設這 100 位同學未調整前的成績之算術平均數 M 介於正整數 n 與 $n+1$ 之間，則 $n =$ ________。 (99萬芳高中)

答. 44。

解. 調整之關係可寫爲 $Y = 10\sqrt{X} \Rightarrow X = \frac{Y^2}{100}$。
$EX = \frac{1}{100}EY^2 = \frac{1}{100}(\mathrm{Var}\, Y + (EY)^2) = 44.5$。所以 $n = 44$。

432. 試證：M 個產品中有 n 個不良品 $(M > n)$，今從這 M 個產品中，隨機取出 k 個 $(n > k)$，則取出不良品個數的期望值爲 $\frac{kn}{M}$。 (101瑞芳高工)

10.3 遞迴技巧

433. A 袋有一紅一白球，B 袋有一白球；若從 A 袋中任選一球丟入 B 袋，再從 B 袋中任選一球丟入 A 袋，這樣稱做一局，則四局後紅球在 B 袋的機率是多少？ (100豐原高中)

答. $\frac{255}{768}$。

解. 在 A 的機率：$P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n + \frac{1}{2}(1 - P_n) = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{2} \Rightarrow P_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}(P_n - \frac{2}{3}) \Rightarrow P_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4^4} \cdot \frac{1}{3}$。
$\Rightarrow$所求 $= \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{256}) = \frac{255}{768}$。

類題. 此技巧可用於一階線性遞迴求一般式，見 100松山家商2招10。

評. 4 維空間是什麼？想像 n 維空間，$n = 4$ 代入。算 P_4，不如直接算 P_n。

434. 設甲、乙兩袋中，甲袋有 1 白球 1 黑球，乙袋有 1 白球，從甲袋隨機取 1 球放入乙袋後，再從乙袋隨機取 1 球放回甲袋，完成這樣的動作稱爲一局，試求 n 局後甲袋有 1 白球 1 黑球的機率爲 ________。 (答案請以 n 表示) (101文華高中)

答. $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4})^n + \frac{2}{3}$。

435. 一袋中有 5 個球，分別寫上 1, 2, 3, 4, 5 號，今由其中任取一球記下其號碼後放回袋中，如此繼續 n 次，若 P_n 表記錄到 n 次時數字和爲偶數的機率，則 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}-P_n)=$ ________。 (100中科實中)

答. $\frac{1}{12}$。

評. 二階的馬克夫鏈，可降成一階，以等比級數處理之。

436. 袋中有 $1,2,\ldots,9$ 號球各一個，每次自袋中取出一球，取後放回，共取 n 次，n 次和爲偶數的機率記爲 P_n，求 (1) P_{n+1} 及 P_n 之關係式 (2) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$。 (100鳳山高中)

答. (1) $P_{n+1}=\frac{5}{9}-\frac{1}{9}P_n=-\frac{1}{9}(P_n-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$。

提示. 同上題，可解。

另解. 考慮 $(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}x)^n$，偶數項的係數和即爲所求。

437. 袋中有編號 $1,2,3,4,5,6,7$，號的球各一個，設每一球被取到的機會相等，今由袋中 一次任取一球，每次取完後均放回袋中再取。令 a_n 表取完 n 次後所取球號總和爲 3 的倍數的機率，求 a_4。 (100玉井工商)

答. $\frac{800}{2401}$。

習題. 看到漂亮的結果，我們應該來問 a_n 才對。

提示. $f(x)=(\frac{2+3x+2x^2}{7})^n$, $a_n=\frac{f(1)+f(\omega)+f(\omega^2)}{3}$。

438. n 個人安排進入 A、B、C 三間房間，A 房間有奇數個人，請問有幾種不同的安排方法？ (100桃園新進聯招)

答. $\frac{3^n-1}{2}$。

解. 以 a_n 表示 n 個人時的方法數，而 b_n 則表示 A 房間偶數人的方法數。

因此有遞迴關係 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，特徵值爲 $1,3$。

令 $a_n=p+q3^n$，解 $\begin{cases} p+3q & =a_1=1 \\ p+9q & =a_2=4 \end{cases} \Rightarrow (p,q)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

所以 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$。

另解. 考慮生成函數 $(x+y+z)^n$ 中 x 奇次方的係數和即爲所求。

令 $y=z=1, x=\pm1$ 代入相減除以 2，得 $\frac{(1+1+1)^n-(-1+1+1)^n}{2}=\frac{3^n-1}{2}$。

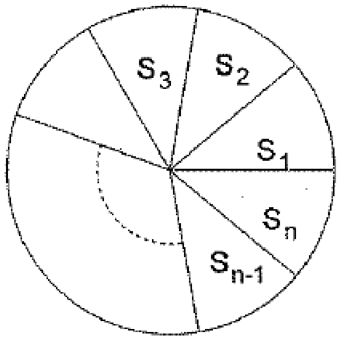
評. 此稱生成函數，類似手法見 100桃園現職聯招6。

439. 以 O 爲圓心的圓上有 n 個相異點，依序爲 A_1、A_2、A_3、...、A_n，此 n 個點將圓分割爲 A_1OA_2、A_2OA_3、A_3OA_4、...、A_nOA_1等 n 個扇形區域。在 m 種不同顏色的色筆中任選一種顏色塗其中任一扇形區域，每區域一色，相鄰區域不同色，全部的方法數有 $S(n,m)$，若 $S(n+2,m)=p\cdot S(n+1,m)+k\cdot S(n,m)$，則 $p-k=$ ________。

答. -1。 (98彰化女中)

解. 考慮 $S(n+2,m)$，其中分成兩類：第一類爲第 1 和第 $n+1$ 個同色，此類有 $(m-1)\times S(n,m)$；第二類爲第 1 和 $n+1$ 異色，此類有 $(m-2)\times S(n+1,m)$。所以 $p-k=-1$。

440. 地圖上某一地區有 n ($n\geq 3$) 個國相鄰，但 n 個國家只有一個共同點(如右圖)。現用紅、黃、綠、藍四種顏色給地圖染色，但使相鄰的國家顏色不同，滿足上述染色規則的方法有 a_n 種。 (99建國高中)



(1) 試求 a_3, a_4 的值。

(2) 試求數列 $\{a_n\}$ 的遞迴關係式。

(3) 求出 a_n 的一般項。

答. (1) $a_3=24$, $a_4=84$ (2) $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$, $n\geq 2$ (3) $a_n=3^n+(-1)^n\cdot 3, n\geq 2$。

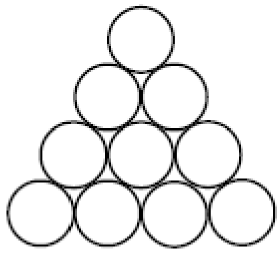
441. ⋆ 一個圓形分割成 n 個不同大小的扇形，以 k 種顏色來塗色，一個扇形使用一個顏色，且相鄰的扇形不同色，則所有的塗法有 a_n 種，試求 a_n。 (100台中二中)

答. $a_n=(k-1)^n+(-1)^n\cdot(k-1), n\geq 2, a_1=k$。

評. 證明同前，由遞迴式和特徵値可導出一般式。這個結果不妨背下來。

另證. 考慮另一種著色方式：從某塊開始上色，順時針著色，每次用色與前次不同，則有 $k\cdot(k-1)^{n-1}$ 種，其中包含頭尾相異色和相同色(若 $n\geq 3$，而 $n=2$ 必異色)，故 $k\cdot(k-1)^{n-1}=a_n+a_{n-1}\Rightarrow(-1)^n a_n-a_2=\sum_{l=3}^{n}(-1)^l(a_l+a_{l-1})$，計算化算可得$a_n=(k-1)^n+(k-1)(-1)^n$。

442. ⋆ 用 5 種不同顏色塗右圖的 10 個固定不動的圓形區域，且相鄰區域須塗不同色，則共有 ________ 種塗法。 (101文華高中)



答. 98820。

443. 10 人坐在排成一列的 10 張椅子上，所有人起身再重新坐下，每人坐到原本的位子或隔壁的位子，則重新坐下的方法數有幾種？ (102板橋高中)

答. 89。

444. 座號 $1 \sim n$ 的 n 個人，及編號 $1 \sim n$ 的 n 頂帽子，每個人恰戴一頂帽子。假設沒 有人戴到與自己相同號碼的帽子之方法有 f_n 種。已知 $n > 2$，則 f_n, f_{n-1}, f_{m-2} 的關係式爲？ (102板橋高中)

答. $f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2})$。

解. 1 號拿到某號的帽子，假設是 2 號的好了，那就分成兩種情形:
(1) 2 號也拿到 1 號的帽子
(2) 2 號沒有拿到 1 號的帽子。

(1) 之情形，就是剩下 $n-2$ 的原問題，也就是 f_{n-2}

(2) 2 號沒有拿到 1 號的帽子，下的是問題是 2 號不拿 1 號帽，3 號不會拿 3 號帽.... n 號不能拿 n 號帽。 其實就是原來 $n-1$ 個人的問題了(偷偷重新編號)，所以這種情形有 f_{n-1}。
綜合兩情形，再考慮 1 號可拿其它帽子，就是 $f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2})$

445. 一隻青蛙 $ABCDE$ 在五點上跳動，每次落點異於跳點，假設從 A 出發，跳 n 次後仍回到 A 之跳法有 a_n 種，若 $a_n = ka_{n-1} + ma_{n-2}$ $(n \geq 3)$，k, m 爲常數，求數對 (k, m)。

答. $(3, 4)$。 (99台中一中)

446. 一隻青蛙在 a, b, c, d, e, f 六相異點跳動，每次跳動之落點異於起跳點，若從 a 起跳，n 次後跳回 a 點有幾種跳法？ (99高雄高中)

答. $\frac{5^n+(-1)^n\cdot 5}{6}$。

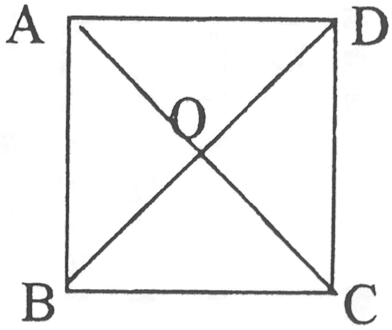
評. 此問題與圓切成扇形著色等價，將顏色對照落，相鄰異色就是落點異於起點，一圈則對應跳回 a 點。

447. 一隻螞蟻在一個正四面體的某一個頂點 A 之上，此時它隨機選擇一個臨近的頂點(每個臨近的頂點 B, C, D 被選中的機率皆爲 $\frac{1}{3}$)，並且在一分鐘之後走到那裡；接著它又隨機選擇 一個臨近的頂點，並在一分鐘之後走到那裡。假設這隻螞蟻一直以上述的方式在各個頂點之間走動，那麼在 n 分鐘之後，它的位置恰好在頂點 A 的機率爲 ________。

答. $\frac{1}{4}\left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}\right)$ (101中科實中)

提示. $f(x) = \left(\frac{x+x^2+x^3}{3}\right)^n$，$P = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$。

448. 如右圖，O 爲正方形的中心。程式設定讓機器跳蚤在圖中諸點之間跳動，每次都可以跳到相鄰的任何一點，例如：由 A 點可跳到 O, B, D 中的任何一點，由 O 點可跳到 A, B, C, D 中的任何一點。設從 O 點開始，經 n 次跳動返回 O 點的路線有 a_n 種，而經 n 次跳動到達 A 點的路線有 b_n 種，試求 $a_6 + b_6$。 (100香山高中)



答. 576。

449. 某樓梯有 10 階，小湉自底部以每次 1 或 2 或 3 階方式向上，問共有幾種方式爬到頂端？ (99清水高中)

答. 274。

解.

1	2	4	7	13	23	44	81	149	274

。

450. 設有一階梯共有 100 階，每次只能走 2 階或 3 階，若走到第 n 階的方法數爲 A_n，其中 n 爲正整數，求 $A_{15} =$ ________。 (99文華高中)

答. 28。

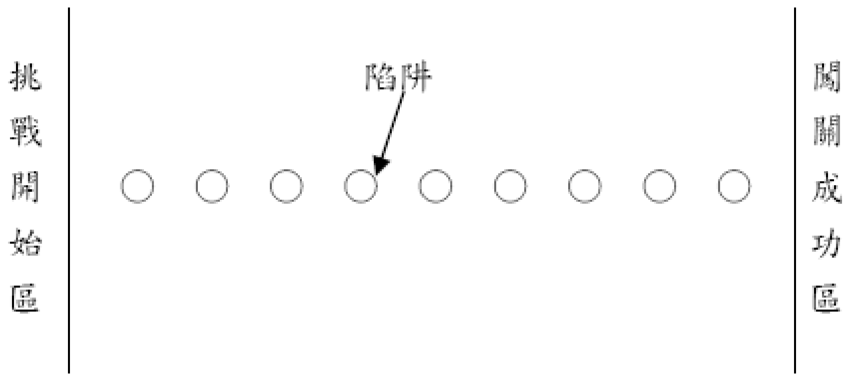
451. ⋆ 小明上樓梯時可能一步上一階或一步上兩階，但不會連續兩步都上兩階。今小明走一個 12 階的樓梯，則上樓梯的方式共有 ________ 種。 (99全國聯招)

答. 88。

452. 設上樓梯可一步跨一階或二階，但不可連續兩步(或兩步以上)皆跨二階，今有一 15 階的樓梯，有多少種上樓的方法？ (97陽明高中)

答. 277。

453. 有一遊戲設置在河的兩岸，河的中間有 9 塊石頭，闖關者若能從開始區平安的到達對岸即成功過關。已知第 4 塊石頭是陷阱，凡是踩到者必跌落河裡無法過關。今有一挑戰者他每一步可跨 1 至 2 塊石頭 的距離，則此挑戰者有種安全過關的方法。 (100彰化女中)



答. 24。

解. 遞迴 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，但陷阱處歸 0。

起	1	2	3	陷	5	6	7	8	9	終
1	1	2	3	0	3	3	6	9	15	24

評. 一維的這招，最早在中學爬樓梯問題學到，因此吾人稱其爲爬樓梯。
二維的則是走捷徑的道路問題。那三維的呢？ 97台中一中某題。

454. 設有一階梯共有 20 階， 每次只能走 2 階或 3 階，第 8 階階梯壞掉不能踩且必須踩上第 12 階的上樓方法數 = ________。 (101中科實中)

答. 32。

455. 如右下圖，以 5 種不同顏色著色，相鄰區域須塗不同色，則有 ________ 種塗法(以標準分解式表之)。 (100苑裡高中、99竹科實中)

答. $20\times 13^{n-1}$。

A_1	A_2	A_3	$\ldots$	A_n
B_1	B_2	B_3	$\ldots$	B_n

共 2 列 n 欄。

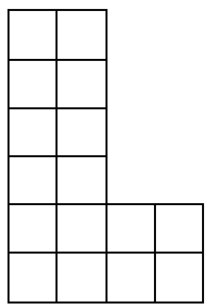
456. 在 $2\times n$ 的方格中，放入黑棋子，棋子不能相鄰的放法有幾種？
(全部不放也是 1 種放法) (100桃園新進聯招)

答. $\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$。

457. 如右圖，麗山高中的 L 形圖騰由一些方格所構成 (100麗山高中)

(1) 用 5 種顏色來塗這些方格，規定相鄰的格子必須著不同色，顏色可重複使用，則著色方法有 ________ 種。

(2) 若用 2×1 恰兩個方格大小的長方形磁磚來鋪這個 L 形的圖騰，規定不能敲碎磁磚，且須剛好鋪滿整個 L 形的圖騰，則鋪法有 ________ 種。



答. (1) 20×13^7 (2) 31。

458. 小松和小山兩人輪流擲一個硬幣。不論由誰擲出，每當出現正面時，小松得 1 分，出現反面，則小山得 1 分。當滿足下列任一條件時，則遊戲停止:

(1) 有一人得到 6 分。

(2) 有一人得到 4 分以上(包含 4 分)，且領先另一人達 3 分。

問: 遊戲停止時，過程共有幾種不同的可能情形? (100松山家商)

答. 630。

解. 如下表格最左下代表 0 : 0，往右上坐標代表分數之比，底線代表遊戲停止。外圈之和 630。

			$\underline{30}$	$\underline{90}$	$\underline{180}$	
		$\underline{10}$	30	90	180	$\underline{180}$
$\underline{1}$	$\underline{4}$	10	30	60	90	$\underline{90}$
1	4	10	20	30	30	$\underline{30}$
1	3	6	10	10	$\underline{10}$	
1	2	3	4	$\underline{4}$		
	1	1	1	$\underline{1}$		

評. 這是遞迴的加強，以上的類題都是對一個數列 $\{a_n\}$ 或 $\{(a_n, b_n, c_n)\}$，這題則是對 $\{a_{m,n}\}$。所以下次看到 $\{a_{p,q,r}\}$ 請不要覺得意外。

459. $\star$ 在 $1, 2, 3, \ldots, 96$ 的直線排列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 中，滿足條件 $(*)$ 的排列共有 ____ 個。

$(*)$: 恰有一個 $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 95\}$，使得 $\left\{\begin{array}{c} a_1 < a_2 < \ldots < a_i \\ a_i > a_{i+1} \\ a_{i+1} < a_{i+2} < \ldots < a_{96} \end{array}\right.$ 成立。

答. $2^{96} - 97$。 (101建國高中2招)

460. 一票箱中有 5 張投給甲的票，有 3 張投給乙的票，在開票的過程中，甲的票一直領先乙的票之機率爲 ________。 (98嘉義高工)

答. $\frac{1}{4}$。

解. 畫圖說故事...如下圖所示，一路領先之情形，共有 14 種。因此所求爲 $\frac{14}{C_3^8} = \frac{1}{4}$。

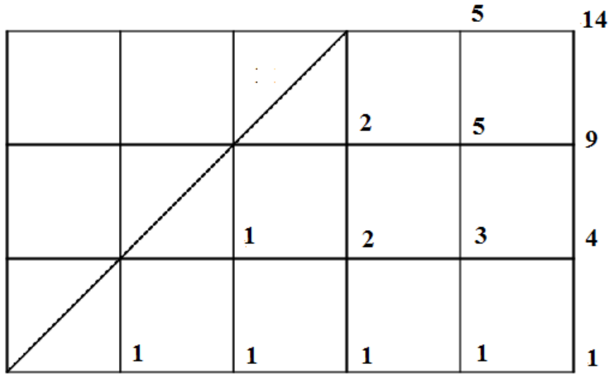


Figure 1: 一路領先

461. 擲一公正硬幣；若正面，則甲得 1 分，乙扣 1 分；若反面，則甲扣 1 分，乙得 1 分。擲 10 次，在甲總分 6 分的情形下，求甲分數一直領先乙分數的機率。 (99彰化藝術)

答. $\frac{3}{5}$。

解. 即 8 正 2 反的情況，各排列序，發生的機會相同，可視爲伯特朗選票問題，一路領先之機率爲 $\frac{8-2}{8+2}=\frac{3}{5}$。其證明過程可見於 數學知識網。

評. 如果不知道這個結果，數字再大一些，考試的時候大概是做不出來的。

462. ⋆ 甲乙二人競選三年子班班長，全班 42 人，每人一票，沒有廢票，逐一唱票，最後甲以 24 : 18 當選。問開票過程中，甲一路領先的機率爲何？ (98彰化女中)

答. $\frac{24-18}{24+18}=\frac{1}{7}$，請見 數學知識網。

463. 袋中有 4 紅球，5 白球，今自袋中每次取出一球，取出不放回，取完爲止。則取球過程中，紅球個數不多於白球個數的機率爲 ________。 (97家齊女中)

答. $\frac{1}{3}$。

解. 多放一顆白球，並改爲一路領先。則有 $\frac{6}{10}p=\frac{6-4}{6+4}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$。

464. ⋆ 如右圖，有一個 12 格的長方形，現將 1~12 的正整數不重複全部填入 12 格之中，且滿足以下二 個條件：(1)左右相鄰兩格的數字，右方大於左方。(2)上下相鄰兩格的數字，上方大於下方。試問符合題意的填入法有幾種。 (97台中一中)

答. 462。

解. 之前寫過，然後有人把它畫成三維的，很漂亮喔：mellow's blog。

評. 這是三維的一路領先。

465. 甲、乙兩人輪擲一不公正銅板，此銅板出現正面之機率爲 $\frac{2}{3}$，出現反面的機率爲 $\frac{1}{3}$。若出現正面，甲給乙 1 元，若出現反面，乙給甲 1 元。今甲有 m 元，乙有 n 元，m、n 均爲自然數，則甲將乙的錢贏光之機率爲 ________。 (99安樂高中)

答. $\frac{2^m-1}{2^{m+n}-1}$。

解. 考慮 P_k $(0<k<m+n)$ 爲甲 k 元、乙 $m+n-k$ 元，甲贏光乙的機率。$P_0=0$, $P_{m+n}=1$。則 $P_k=\frac{2}{3}P_{k-1}+\frac{1}{3}P_{k+1}\Rightarrow\frac{2}{3}(P_k-P_{k-1})=\frac{1}{3}(P_{k+1}-P_k)\Rightarrow P_{k+1}-P_k=2(P_k-P_{k-1})\Rightarrow P_{k+1}-P_k=2^kP_1$，對 $k=1,2,3\ldots,m+n-1$。將之求和得 $1=(2^{m+n}-1)P_1\Rightarrow P_1=\frac{1}{2^{m+n}-1}$。再由 $\sum\limits_{k=1}^{m-1}(P_{k+1}-P_k)$，可得 $P_m=\frac{2^m-1}{2^{m+n}-1}$。

評. 很經典的題目，通常在機率導論裡會學到。

466. $\star$ 設有 n 個正立方體，邊長分別爲 $1,2,\ldots,n$ 公分，現在將它們由下而上堆疊起來，可隨機 以任意大小順序堆疊，但是若連續堆疊的兩個立方體，在上面的立方體邊長超過位在下面立方體邊長 2 公分，則此堆疊方式將會傾倒(例如：若由下而上是 173172174175 則可安全堆疊， 但 172175173174 則否)，問能安全堆疊的機率爲何？ (98高雄市聯招)

答. $\frac{2\cdot3^{n-2}}{n!}$。

467. 連續投擲 7 次硬幣，求：至少連續 3 個以上正面出現的情形有幾種。 (99中壢高中)

答. 47。

解. 令 a_n 表示連續投擲 n 次，過程中皆無連續 3 個以上正面出現的情形數。
當 $n>3$，可將這些情形分成 3 類，結尾分別爲：「反，反正，反正正」。最後一次是反的，前 $n-1$ 次亦不會有連 3 正，故此類的數量恰爲 a_{n-1}，同理知另兩類的數量爲 a_{n-2},a_{n-3}，故 a_n 滿足遞迴關係 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$, $n>3$，$\langle a_n\rangle_{n=1}^{7}:2,4,7,13,24,44,81$，故有 $128-81=47$。

類題. 100麗山高中16。

10.4 二項式定理

468. 求 $C_2^9(-3)^2+C_3^9(-3)^3+C_4^9(-3)^4+C_5^9(-3)^5+C_6^9(-3)^6+C_7^9(-3)^7+C_8^9(-3)^8+C_9^9(-3)^9$。

答. -486。 (100內湖高工2招)

469. 設 $n=2012$，則 $\frac{1}{2^n}(1-3C_2^n+3^2C_4^n-3^3C_6^n+\ldots-3^{1005}C_{2010}^n+3^{1006}C_{2012}^n)=$ ________。

答. $-\frac{1}{2}$。 (100中正高中2招)

解. $\text{Re}\,(1+\sqrt{3}i)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} C_{2k}^n 3^k(-1)^k = 1 - 3C_2^n + 3^2C_4^n - 3^3C_6^n + \ldots - 3^{1005}C_{2010}^n + 3^{1006}C_{2012}^n$。

由棣美弗定理得 $(1+\sqrt{3}i)^{2012} = 2^{2012}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$。

因此所求爲 $= \frac{\text{Re}\,(1+\sqrt{3})^{2012}}{2^{2012}} = -\frac{1}{2}$。

470. 求 $\frac{1}{2^{100}}(3^{50} - 3^{49}C_2^{100} + 3^{48}C_4^{100} - 3^{47}C_6^{100} + \ldots - 3C_{98}^{100} + C_{100}^{100})$ 的值爲 ________。

答. $-\frac{1}{2}$。 (99桃園農工)

471. $C_1^{2011} - C_3^{2011} + C_5^{2011} - C_7^{2001} + \cdots + C_{2009}^{2011} - C_{2011}^{2011} = ?$ (100板橋高中)

答. 2^{1005}。

472. (1) 求 $\sum_{k=1}^{n} C_{2k-1}^{2n}$。 (100新竹高中)

(2) 求 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{2k-1}^{2n}$。 (99新竹高中)

答. (1) 2^{2n-1} (2) $-2^n\sin\frac{n\pi}{2}$。

473. 觀察 $C_0^n + C_1^n + \ldots + C_n^n = (C_0^n + C_3^n + C_6^n\ldots) + (C_1^n + C_4^n\ldots) + (C_2^n + C_5^n\ldots)$。令 $A = C_0^{3k} + C_3^{3k} + C_6^{3k}\ldots + C_{3k}^{3k}, B = C_1^{3k} + C_4^{3k} + \ldots + C_{3k-2}^{3k}, C = C_2^{3k} + C_5^{3k} + \ldots + C_{3k-1}^{3k}$, $k \in \mathbb{N}$。

(1) 比較 A 與 B 的大小關係。

(2) 計算 A 值。 (100桃園現職聯招)

答. (1) $\begin{cases} A < B & \text{, if k is odd;} \\ A > B & \text{, if k is even.} \end{cases}$ (2) $A = \frac{2^{3k}+2(-1)^k}{3}$。

解. 利用二項式定理計算 $(-\omega^2)^{3k} = (1+\omega)^{3k} = A + B\omega + C\omega^2 = (A-C) + (B-C)\omega$，其中 ω 爲 $x^3 - 1 = 0$ 之虛根，$C = 2^{3k} - A - B$。

因此 $(-1)^k = (A-C) + (B-C) \Rightarrow B = C, A = B + (-1)^k$。

(1) 當 k 爲奇數時，$A = B - 1 < B$。反之偶數時，$A = B + 1 > B$ 。

(2) 由 $A + B + C = 2^{3k} \Rightarrow A = \frac{2^{3k}+2(-1)^k}{3}$。

類題. 看到隔幾項，就帶幾次方根。此技巧可運用於 100桃園新進聯招A1。

474. 已知 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展開式爲 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2000}x^{2000}$，試求 $a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + a_{1998}$。 (100慈濟聯招)

答. 3^{999}。

475. 設 $(1+x)^{200}=\sum\limits_{k=0}^{200}a_kx^k$，則 $\sum\limits_{k=1}^{66}a_{3k}=$ ________。 (99安樂高中)

答. $\frac{2^{200}-4}{3}$。

476. 若 n 爲自然數，求證 $C_0^{2n}\cdot 3^n+C_2^{2n}\cdot 3^{n-1}+C_4^{2n}\cdot 3^{n-2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$ 恆爲 2^n 的倍數。

類題. 100板橋高中1。 (100中正高中2招)

477. 設 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$，其中 n,a_n,b_n 皆爲正整數，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$ ________。

答. $\sqrt{2}$。 (100成淵高中)

解. 若 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$, 則 $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$。
解聯立得 $a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2}$, $b_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$。
所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}$。

類題. 亦可用遞迴、特徵值解之，見 100北港高中14。

478. 求 $\left[(2+\sqrt{6})^{100}\right]$ 的個位數。 (98清水高中)

答. 1。

解. $(2+\sqrt{6})^{100}=(10+4\sqrt{6})^{50}=A+B\sqrt{6}$, $(2+\sqrt{6})^{100}+(\sqrt{6}-2)^{100}=2A$。又 $0<(\sqrt{6}-2)^{100}<1\Rightarrow\left[(2+\sqrt{6})^{100}\right]=2A-1$。
二項式展開得 $A=\sum\limits_{k=0}^{25}C_{2k}^{50}(4\sqrt{6})^{2k}\cdot 10^{50-2k}$ 個位非零的項只有 $(4\sqrt{6})^{50}$ 得 6。所以 $2A-1$ 之個位數爲 1。

類題. 亦可遞迴循環解之，見 99南港高工15。

479. 求 $\left[(3+\sqrt{11})^{100}\right]$ 的個位數爲多少? (98新港藝術)

答. 1。

480. 大於 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ 的最小整數爲何? (97彰化藝術)

答. 970。

481. 求 $6^{99}+7^{99}+8^{99}$ 除以 343 的餘數。 (99萬芳高中)

答. 14。

解. 注意 $343=7^3$。由二項式定理可得 $6^{99}+7^{99}+8^{99}\equiv(-C_2^{99}\cdot 49+99\cdot 7-1)+(C_2^{99}\cdot 49+99\cdot 7+1)\equiv 2\cdot 99\cdot 7\equiv 14\cdot(2\cdot 49+1)\equiv 14\ (\text{mod } 343)$。

482. 設 $a_n = 7^n + 8^n + 9^n$，其中 $n = 1, 2, 3, \ldots$，試求 a_{100} 除以 512 的餘數。(100彰化女中)

答. 258。

483. 設 n 是奇數，則 $7^n + C_1^n \times 7^{n-1} + C_2^n \times 7^{n-2} + \ldots + +C_{n-1}^n \times 7$ 被 9 除所得的餘數是 ________。 (97楊梅高中)

答. 7。

484. 利用二項式定理，證明 $3^{2n+2} - 8n - 9$ 可以被 64 整除。 (100中和高中)

類題. 100玉井工商計算2。

485. 求 $f(x) = x^{10} - 2x^5 + 3x^2 - 1$ 被 $(x+1)^3$ 除的餘式。 (99彰化藝術)

答. $68(x+1)^2 - 26(x+1) + 5 = 68x^2 + 110x + 47$。

解 1. 以 $x = (x+1) - 1$，二項式定理展開可得餘式 $68(x+1)^2 - 26(x+1) + 5$。

解 2. 可令 $r(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$，解方程式 $r(-1) = f(-1), r'(-1) = f'(-1), r''(-1) = f''(-1)$。

解 3. 混合解法 1.2 之精神，令餘式爲 $r(x) = a(x+1)^2 - 26(x+1) + 5$。則三個方程可各自解得 a, b, c。

類題. 100永春代理17。

486. 多項式 x^{100} 除以 $(x-1)^3$ 的餘式爲 ________。 (97嘉義高中)

答. $4950(x-1)^2 + 100(x-1) + 1$。

487. 設 $f(x) = ax^8 + bx^7 + 1$ 可被 $(x-1)^2$ 整除，則 $a =$ ________, $b =$ ________。

答. $a = 7, b = -8$。 (100新竹高工)

488. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，則 $A^{20} =$ ________ 。 (100成淵高中)

答. $\begin{bmatrix} 1 & 40 & 760 \\ 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

解. 令 $A=I+C$, 其中 $C=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，由二項式定理得 $A^{20}=I+20C+\frac{n(n-1)}{2}C^2=\begin{bmatrix}1&40&760\\0&1&40\\0&0&1\end{bmatrix}$。

489. 設 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，若 $A+A^2+A^3+\ldots+A^{20}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$，則 $c=$ ________。

答. 5950。 (100中壢高中)

490. 設 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 且 $v=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，則 $A^{10}v=$ ________。 (99台北縣聯招)

答. $\begin{bmatrix}31\\2\\3\end{bmatrix}$。

10.5 恆等式

491. $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots\ldots+(1+x)^{20}$ 展開式中，x^3 項之係數爲?

答. 5985。 (100新竹高工)

解. 等比求和 $=\frac{(1+x)^{21}-(1+x)}{x}$，取分子 4 次項係數 $C^{21}_4=5985$。

另解. 見下題。

492. 試求 $(1+x^2)+2(1+x^2)^2+3(1+x^2)^3+\ldots+15(1+x^2)^{15}$ 展開式中，x^4 項的係數。

答. 6580。 (100文華高中代理)

解. $\sum\limits_{n=2}^{15} nC^n_2=\sum\limits_{n=2}^{15}\left(3C^{n+1}_3-C^n_2\right)=3C^{17}_4-C^{16}_3=6580$。

評. 巧妙拆項使用帕斯卡定理，可搭配牛頓插值多項式使用，見下題。

493. 試求 $\sum\limits_{k=3}^{18} k^2C^k_3$。 (100中壢高中)

答. 903108。

解. $k^2=(k+1)(k+2)-3(k+1)+1$。
$\sum\limits_{k=3}^{18}(k+1)(k+2)C_3^k=20\cdot\sum\limits_{k=3}^{18}C_5^{k+2}=20C_6^{21}$ 。
同理 $\sum\limits_{k=3}^{18}(k+1)C_3^k=4C_4^{20},\sum\limits_{k=3}^{18}C_3^k=C_4^{19}$。
三者相加得所求$=903108$。

類題. 99屏東女中8。

494. 求 (1) $\sum\limits_{k=1}^{16}kC_k^{16}=$ ________。
(2) $\sum\limits_{k=1}^{25}H_k^3=$ ________。 (99關西高中)

答. (1) $2^{19}=524288$ (2) 3275。

495. $1+2(1+3)+3(1+3+6)+4(1+3+6+10)+\ldots+17(1+3+6+\ldots+153)=$ ________。

答. 66861。 (101中正高中2招)

496. 試求 $C_0^{21}+\frac{1}{2}C_1^{21}+\frac{1}{3}C_2^{21}+\frac{1}{4}C_3^{21}+\ldots+\frac{1}{22}C_{21}^{21}=$ ________。 (100文華高中代理)

答. $\frac{2^{22}-1}{22}$。

解. $\sum\limits_{k=0}^{21}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{21!}{k!(21-k)!}=\frac{1}{22}\sum\limits_{k=0}^{21}\frac{22!}{(k+1)!(22-k-1)!}=\frac{1}{22}\sum\limits_{k=1}^{22}C_k^{22}=\frac{2^{22}-1}{22}$。

類題. 亦有逐項微分或積分的解法，見 98彰化女中6。

497. 已知 H_m^n 表示「自 n 種(每種多個)不同元素中任取 m 個(可重複選取)」之組合數；C_m^n 表示「自 n 個不同元素中任取 m 個」之組合數。若 $H_{10}^n=\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k\cdot C_k^n)$ 對於 $\forall n\geq 10$ 恆成立，若 $x=a_3,y=\sum\limits_{k=1}^{10}a_k$，求數對 $(x,y)=$ ________。 (99建國高中)

答. $(36,512)$。

註. 其中 $C_k^{n+m}=\sum\limits_{l+j=k}C_i^nC_j^m$，是由 $(1+x)^{n+m}=(1+x)^n(1+x)^m$ 的展開式係數所得。以上等式，亦可用在期望值或機率的計算上，見 99高雄高中1。

498. 設 n 爲正整數，求 $(C_1^n)^2+2(C_2^n)^2+3(C_3^n)^2+\ldots+n(C_n^n)^2$。 (100北港高中)

答. nC_n^{2n-1}。

評. 三解：一者微分，二者微調組合數的編號，三者期望值，以下之題目，大都有不同方法解之。

499. 若 $\sum\limits_{k=1}^{2012} k(C_k^{2012})^2 = 2012 \cdot C_n^m$，求數對 $(m,n) =$ ________。 (101中正高中2招)

答. $(4023, 2011)$ 或 $(4023, 2012)$。

500. 設 $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \ldots + C_n^n x^n$，則 $C_1^n + 2^2 C_2^n + \ldots + n^2 C_n^n =$ ________。

答. $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$。 (100苑裡高中)

解. 令 $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$，則所求 $= 2^n \cdot EX^2 = 2^n \cdot (\text{Var}\, X + (EX)^2) = 2^n \cdot (\frac{n}{4} + (\frac{n}{2})^2)$。

類題. 亦可微分解之見 98彰化女中16。

501. 試證 $C_2^2 C_1^n + C_2^3 C_2^n + C_2^4 C_3^n + \ldots + C_2^{n+1} C_n^n = n(n+3)2^{n-3}$。 (99高雄市聯招)

502. 試計算 $\sum\limits_{k=1}^{40} \frac{k C_{40-k}^{60} C_k^{40}}{C_{40}^{100}}$ 之值。 (98南港高工)

答. 16。

503. 利用歸納法證明: $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$，其中 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$。 (100家齊女中)

504. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^{n-k} = C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + C_3^{n-3} + \ldots =$ ________。(註: If $n > m, C_n^m = 0$)

答. $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$。 (100桃園新進聯招)

505. 求 $\sum\limits_{k=0}^{100} \left(x + \frac{k}{100}\right)^2 C_k^{100} x^k (1-x)^{100-k}$ 之值。 (99東山高中)

答. $\frac{399}{100}x^2 + \frac{x}{100}$。