大考中心 99 課綱指考數甲參考試題

俞克斌老師　編授

1. 設 $f(x)=8x^3-4x-1$，請問極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x^2)-f(1)}{x^2}$ 之值為下列哪個選項？

(1)0　(2)3　(3)12　(4)15　(5)20 。　　　【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(5) （99 課綱第六冊第二章多項式函數的微積分）（函數極限與導數）（非學測範圍）

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x^2\to 0}}\dfrac{f(1+x^2)-f(1)}{x^2}=f'(1)=24x^2-4\Big|_{x=1}=20$

2. 在 ΔABC 中，已知 $\angle B=60°$、$\angle C=45°$，且知 ΔABC 之面積為 $3+\sqrt{3}$，
則其最短邊長為下列哪個選項？

(1) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(2) $\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(4) $2\sqrt{2}$　(5) $2\sqrt{3}$ 。【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(4) （99 課綱第三冊第一章三角）（正弦定律、面積公式）

解：$\angle B=60°$、$\angle C=45°$、$\angle A=75°$

$a：b：c=\sin 75°：\sin 60°：\sin 45°=(\sqrt{6}+\sqrt{2})：(2\sqrt{3})：(2\sqrt{2})$

ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})t\cdot(2\sqrt{3})t\cdot\sin 45°=3+\sqrt{3}$

$\Rightarrow t=1$，故最短邊長 $2\sqrt{2}t=2\sqrt{2}$

3. 坐標空間中有一長度為 17 的線段 $\overline{AB}$，
若 $\overline{AB}$ 在 xy 平面、yz 平面上正射影的長度分別為 11、$12\sqrt{2}$，
則 $\overline{AB}$ 在 zx 平面上正射影的長度為下列哪個選項？

(1)11　(2)12　(3)13　(4)14　(5)15 。　　　【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(3) （99 課綱第四冊第一章空間向量）（空間概念）

解：令 $\overrightarrow{AB}=(x,y,z)\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=17\Rightarrow x^2+y^2+z^2=289$

$\overrightarrow{AB}$ 在 xy 平面之投影長 $=\sqrt{x^2+y^2}=11\Rightarrow x^2+y^2=121$

$\overrightarrow{AB}$ 在 yz 平面之投影長 $=\sqrt{y^2+z^2}=12\sqrt{2}\Rightarrow y^2+z^2=288$

$\Rightarrow z^2=168$，$x^2=1$，$y^2=120$

$\overrightarrow{AB}$ 在 zx 平面之投影長 $=\sqrt{z^2+x^2}=13$

4. 因應民眾對肉品安全的疑慮，某研究機構研發了一種毒物試劑，
宣稱如果肉品內含有此種毒物，一定可以檢測出來，
但是有5%的機率會將不含該毒物的肉品誤判爲含有該毒物。
假設已知某一批進口肉品，其中有0.2%含有此毒物，
今隨機抽驗該批肉品中之一包，檢體被檢測出含有該毒物。
若依該機構宣稱之檢測率，請問該檢體確實含有該毒物的機率 P 滿足下列哪個選項？
(1) $P<0.03$　(2) $0.03\le P<0.04$　(3) $0.04\le P<0.05$　(4) $0.05\le P<0.1$　(5) $P\ge 0.1$。
【99課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(2) **（99課綱第二冊第三章機率）（貝氏定理）**

解：

含　毒 $\frac{2}{1000}$
- 被檢出有毒 $\frac{100}{100}$
- 未被檢出 0

不含毒 $\frac{998}{1000}$
- 被檢出有毒 $\frac{5}{100}$
- 未被檢出 $\frac{95}{100}$

$$\frac{\frac{2}{1000}\times\frac{100}{100}}{\frac{2}{1000}\times\frac{100}{100}+\frac{998}{1000}\times\frac{5}{100}}=\frac{20}{519}\fallingdotseq 0.038\cdots\cdots$$

5. 當 (x,y) 在過 $A(2,0)$、$B(0,3)$ 的直線上變動時，關於 $K=8^x+4^y$ 的敘述，
請選出正確的選項：
(1) K 有最大值 64、最小值 16
(2) K 有最大值 64、但沒有最小值
(3) K 沒有最大值、但有最小值 16
(4) K 沒有最大值、但有最小值 20
(5) K 沒有最大值也沒有最小值。　【99課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(3) **（99課綱第一冊第一章數與式）（算幾不等式）**

解：$\overleftrightarrow{AB}$：$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1\Rightarrow 3x+2y=6$

$K=2^{3x}+2^{2y}\ge 2\sqrt{2^{3x}\cdot 2^{2y}}=2\sqrt{2^{3x+2y}}=2\cdot 2^3=16$

當 $3x=2y=3$ 時，K 有最小值 16，但 K 無最大值

6. 坐標平面上，
直線 $x=a$（$a>0$）與函數 $y=\log_2 x$、$y=\log_4 x$ 的圖形分別交於點 A、B。
以 d_a 表示此兩點距離（即 $\overline{AB}$），請選出正確的選項：
(1) $d_2=\frac{1}{2}$　(2) $d_8=d_{\frac{1}{8}}$　(3) $d_3+d_5<2$
(4) 對任意正數 a，d_a 恆小於 8
(5) 若 r、s、t 三數皆大於 1 且成等比數列，則 $d_s=\frac{d_r+d_t}{2}$。
【99課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(1)(2)(3)(5) **（99課綱第一冊第三章指數、對數函數）（對數運算律）**

解：$d_a=\left|\ell og_2 a-\ell og_4 a\right|=\left|\ell og_4 a^2-\ell og_4 a\right|=\left|\ell og_4\dfrac{a^2}{a}\right|=\left|\ell og_4 a\right|$

(1) $d_2=\ell og_4 2=\dfrac{1}{2}$，

(2) $d_8=\ell og_4 8=\dfrac{3}{2}$，$d_{\frac{1}{8}}=\left|\ell og_4\dfrac{1}{8}\right|=\dfrac{3}{2}$

(3) $d_3+d_5=\ell og_4 3+\ell og_4 5=\ell og_4 15<\ell og_4 16=2$

(4) 當 $a>4^8$ 時，才能成立 $d_a>8$

(5) r、$s=rd$，$t=rd^2>1$，$2d_s=2\ell og_4 rd=\ell og_4 r^2d^2$

$d_r+d_t=\ell og_4 r+\ell og_4 rd^2=\ell og_4 r^2d^2$

7. 已知多項式 $f(x)$ 的函數圖形 $y=f(x)$ 通過 $(-2,1)$、$(-1,3)$、$(0,-2)$ 與 $(1,3)$，請選出正確的選項：
(1) $f(x)$ 是三次多項式
(2)能找到正實數 α 使得 $f(\alpha)=0$
(3)只能找到一個負實數 β 使得 $f(\beta)=0$
(4) $f(x)$ 的函數圖形在點 $(0,-2)$ 之切線爲水平線
(5) $\int_{-1}^{1}f'(x)dx=0$。　　【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(2)(5) **（99 課綱第一冊第二章多項式函數）（勘根定理）**
（99 課綱第六冊第二章多項式函數的微積分）（導數與切線、積分）（非學測範圍）

解：(1)只能確定 $\deg f(x)\geq 3$，不必然 $f(x)$ 是三次多項式

(2)由「勘根定理」知：$f(0)=-2<0$，$f(1)=3>0$，區間 $(0,1)$ 內有正根 α

(3)由「勘根定理」知：$f(0)=-2<0$，$f(-1)=3>0$，區間 $(-1,0)$ 內至少一負根 β

(4) $f(x)=(x+2)(x+1)(x)(x-1)Q(x)+a(x+1)x(x-1)+bx(x-1)+cx-2$

$f(1)=c-2=3\Rightarrow c=5$

$f(-1)=2b-5-2=3\Rightarrow b=5$

$f(-2)=-6a+30-10-2=1\Rightarrow a=\dfrac{17}{6}$

$f(x)=(x+2)(x+1)x(x-1)Q(x)+\dfrac{17}{6}x^3+5x^2-\dfrac{17}{6}x-2$

$f'(0)$ 不必然爲 0

(5) $\int_{-1}^{1}f'(x)dx=\left[f(x)+c\right]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)$

$$=\left[\frac{17}{6}+5-\frac{17}{6}-2\right]-\left[-\frac{17}{6}+5+\frac{17}{6}-2\right]=0$$

8. 關於函數 $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$，其中 x 爲任意實數，請選出正確的選項：

(1) $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$

(2) $f(x)$ 是一個週期函數，其最小正週期爲 2π

(3) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=-\dfrac{\pi}{6}$

(4) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點中，離原點最近的爲 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$

(5) $y=f(x)$ 的圖形對稱於原點。【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(2)(3)

（99 課綱第五冊第二章三角函數）（三角疊合、三角函數圖形週期值域）（非學測範圍）

解：$f(x)=2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\right]=2\sin(60^\circ-x)$

$-2\le f(x)\le 2$，$f(x)$ 週期 2π

當 $x=-\dfrac{\pi}{6}=-30^\circ$ 時，$y=f(x)$ 有最小值，可爲對稱軸

當 $x=60^\circ$ 或 $x=-120^\circ$ 時，$y=f(x)=0$

當 $x=0^\circ$，$y=f(x)\ne 0$，原點不爲對稱點

9. 設實數 a、b、c、d 滿足 $a^2+b^2=1$ 且 $(c-3)^2+(d-4)^2=4$，請選出正確的選項：

(1) $a(c-3)+b(d-4)$ 的最大值爲 2

(2) $ac+bd$ 的最大值爲 8

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的最大值爲 7

(4) 僅有一組 a、b、c、d 使得 $ac+bd$ 之值最大

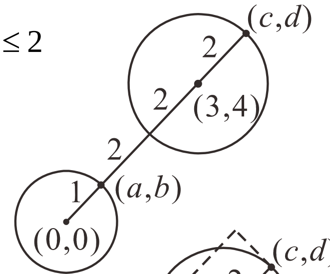
(5) 僅有一組 a、b、c、d 使得行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 之值最大。【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(1)(3)(4)(5) **（99 課綱第三冊第三章平面向量）（柯西不等式、行列式與面積）**

解：(1) 由柯西不等式知：

$$\left[a^2+b^2\right]\left[(c-3)^2+(d-4)^2\right]\ge\left[a(c-3)+b(d-4)\right]^2$$

$$\Rightarrow [1][4]\ge\left[a(c-3)+b(d-4)\right]^2\Rightarrow -2\le a(c-3)+b(d-4)\le 2$$



(2)(3)(4)(5) (a,b) 爲 $x^2+y^2=1$ 上點，

(c,d) 爲 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上點

當 (a,b)、(c,d) 於右圖位置時

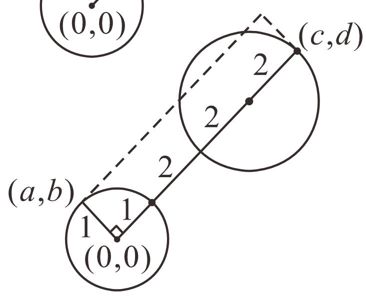
$ac+bd$ 表向量 (a,b) 與向量 (c,d) 內積

有最大值 $=1\times 7\times\cos 0^\circ=7$

當 (a,b)、(c,d) 於右圖位置時

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 表向量 (a,b) 與向量 (c,d)

所張拓出之平行四邊形面積有最大值 $1\times 7=7$



10. 若坐標空間中通過點 $A(1,3,2)$、$B(5,2,0)$

且與直線 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$ 平行的平面方程式爲 $ax+by+cz=1$，

則 $(a,b,c)=$ ______。【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：$(1,-2,3)$（99 課綱第四冊第二章空間中的直線與平面）（平面法向量、外積與公垂）

解：$\overrightarrow{AB}=(4,-1,-2)$，$\overrightarrow{L}=(1,2,1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{L}=(3,-6,9)$

所求平面 $=3x-6y+9z=3\Rightarrow x-2y+3z=1$

11. 同時擲一枚均勻硬幣與一顆公正骰子，

若硬幣擲出正面，可得骰子點數的 30 倍獎金，

若硬幣擲出反面，可得骰子點數的 10 倍獎金（單位：元）。

則擲一次硬幣與骰子的獎金期望值爲 ______ 元。【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：70（99 課綱第五冊第一章機率統計 II）（期望值）（非學測範圍）

解：$\left[30\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{1+2+3+4+5+6}{6}\right]=20\times\frac{7}{2}=70$

12. 設 $f(x)$ 爲實係數三次多項式。已知：

(i)當 $0<x<2$ 時，$f'(x)<0$；而 $f'(x)\ge 0$ 對所有其他 x 成立；

(ii) $f(x)$ 的圖形在反曲點的切線斜率爲 -3。

(1)試求 $f'(x)$。

(2)若 $f(x)$ 又滿足 $\int_0^2 f(x)dx=0$，試求 $f(x)$ 【99 課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(1) $f'(x)=3x^2-6x$　(2) $f(x)=x^3-3x^2+2$

（99 課綱第六冊第二章多項式函數的微積分）（導數與切線、積分）（非學測範圍）

解：$\deg f(x)=3$，$\deg f'(x)=2$ 且 $0<x<2$ 時 $f'(x)<0$

$\Rightarrow f'(x)=m(x)(x-2)=mx^2-2mx$，$m>0$

$\Rightarrow f''(x)=2mx-2m=2m(x-1)$，反曲點 $(1,f(1))$

反曲點之切線斜率 $f'(1)=-m=-3$　$\therefore m=3$

故 $f'(x)=3x^2-6x\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+k$

而 $\int_0^2 f(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+kx+c\right]_0^2=4-8+2k=0\Rightarrow k=2$

故 $f(x)=x^3-3x^2+2$

13. 坐標平面上有一序列的點(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、(a_3,b_3)、……，

已知$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n-\dfrac{1}{2}b_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_n \end{cases}$ 對所有的正整數$n=1$，2，3，……都成立。

請回答下列問題：

(1)試求二階方陣A使得$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$。

(2) A如(1)，試求最小正整數n，使得$A^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(3)若$(a_{100},b_{100})=(1,2)$，試求(a_1,b_1)。　【99課綱數甲大考中心參考試卷】

答：(1)$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$　(2)12　(3)$(2,-1)$

（99課綱第四冊第三章矩陣）（矩陣乘法、旋轉矩陣）

解：(1)(2)$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$n\in N$

n之最小值12

(3)$\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix}=A^{99}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=A^3\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\Rightarrow(a_1,b_1)=(2,-1)$