第 4 題

因為 n 除以 5 和 6 都不足 1，所以可以很快找出符合這個性質的 n 最小值為 29
接著再逐次加 $\operatorname{lcm}(5,6)=30$ 得到 29,59,89,...
然後在這些數中找到符合「除以 8 餘 3」的數
第二個 59 就是了
接著再逐次加 $\operatorname{lcm}(5,6,8)=120$ 得到 59,179,299...
可以得到最接近 5000 的數是 4979
所以數字總和 $=4+9+7+9=29$

$\boxed{\text{備註}}$：1. 原題目有打字錯誤的地方
2. 此是主要是中國剩餘定理的概念

第 16 題

先來分析一下題目，首先 x 和 y 都是整數，加上式子又有絕對值
所以要求最小值的意思就是看能不能是零，如果可以當然最好，如果不行，那就找最靠近零的時候
分析完後就可以開始試試看了

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-\frac{11}{5}=\frac{20x+15y-132}{60}$$

那有沒有可能會等於零呢，也就是分子 $20x+15y-132$ 會不會等於零？
根據不定方程(diophantine equation)的定理(見下面備註)可知 $20x+15y-132=0$ 是不可能有整數解的
所以打消它等於零的念頭
那就找最靠近零的時候
因為 $\gcd(20,15)=5$，所以根據不定方程的定理可知 $20x+15y=130$ 或 135 是有解的
表示可以找到整數 x 和 y 使得 $20x+15y-132=-2$ 或 3
因此 $\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-\frac{11}{5}\right|=\left|\frac{20x+15y-132}{60}\right|$ 的最小值 $=\left|\frac{-2}{60}\right|=\frac{1}{30}$ (當 $20x+15y=130$ 時)

$\boxed{\text{備註}}$：1. 不定方程 $ax+by=c$ 有整數解 $\Leftrightarrow$ c 是 $\gcd(a,b)$ 的倍數
2. 至於如何找出確切的 x , y 整數值，那就是(高中數學)舊教材了
3. 也許是因為自己是唸數論出身的，我覺得這題實在出得太棒了，可以考出老師數學內涵的廣度，如果知道不定方程的這個基本定理，這題幾乎不是在考計算，也不需要利用任何技巧。當然還是有個小缺點，就是你可以慢慢帶整數去試驗看看，譬如說先固定 $x=6$ 或 7，因為這時候 $20x-132$ 最靠近零，然後再代 y 試試看，不過畢竟這種方法有點冒險，因為可以故意設計題目，使得無法用土法煉鋼的代入法。

第 20 題

由遞迴關係式反覆代換可得 $a_7=8a_2+5a_1$ 和 $a_6=5a_2+3a_1$
因為 $a_7=120$ ， $a_2,a_1\in\mathbb{N}$ 且 $a_2>a_1$
所以只有唯一解 $a_2=10$ ， $a_1=8$
因此 $a_6=5a_2+3a_1=50+24=74$

第 29 題

因為 $\frac{\pi}{2012}+\frac{1005\pi}{2012}=\frac{2\pi}{2012}+\frac{1004\pi}{2012}=\cdots=\frac{502\pi}{2012}+\frac{504\pi}{2012}=\frac{\pi}{2}$

所以考慮 $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 可知

$$\begin{aligned}
f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\frac{1}{1+\tan^3 x}+\frac{1}{1+\tan^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\\
&=\frac{1}{1+\tan^3 x}+\frac{1}{1+\cot^3 x}\\
&=\frac{2+\tan^3 x+\cot^3 x}{2+\tan^3 x+\cot^3 x}\\
&=1
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{\pi}{2012}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2012}\right)+\cdots+f\left(\frac{502\pi}{2012}\right)+f\left(\frac{503\pi}{2012}\right)+f\left(\frac{504\pi}{2012}\right)+\cdots+f\left(\frac{1004\pi}{2012}\right)+f\left(\frac{1005\pi}{2012}\right)\\
&=\left[f\left(\frac{\pi}{2012}\right)+f\left(\frac{1005\pi}{2012}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2\pi}{2012}\right)+f\left(\frac{1004\pi}{2012}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{502\pi}{2012}\right)+f\left(\frac{504\pi}{2012}\right)\right]+f\left(\frac{503\pi}{2012}\right)\\
&=1+1+\cdots+1+f\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&=502.5
\end{aligned}$$

備註：1. 此題也算是經典考題，但現在比較少考了，因為是比較技巧性的題目，如果有看不懂的話，可以把過程多看幾次，就知道為什麼要這樣考慮了。
2. 原題目有打字錯誤的地方

第 30 題

正 n 邊形每個外角的度數為 $\frac{360}{n}$

因為內角度數為整數，所以外角度數當然也是整數

因此 n 必須是 360 的正因數

$360=2^3\times3^2\times5$

所以 360 的正因數共有 $(3+1)(2+1)(1+1)=24$ 個

但當然要扣掉當 $n=1,2$ 兩種情況

所以 n 的值只有 22 個

第 47 題

首先它是收斂級數，所以才可以用下列方法

設 $S=1+2\times\frac{1}{3}+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots$

則 $\frac{1}{3}\times S=1\times\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots$

上式減下式可得 $\frac{2}{3}\times S=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

所以題目要求的 $S=\frac{9}{4}$

第 48 題

由泰勒展開式(Taylor expansion)可知 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

所以所求 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$

第 50 題

利用三角代換

設 $x=3\sin\theta$，則 $dx=3\cos\theta d\theta$ 且 $\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$

另外，因為 $\int\cos^2 x dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

所以所求 $\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{9\pi}{4}$