

101 學年度南臺灣國中教師甄選命題策略聯盟筆試試題

專門科目—數學科

說明：

本試卷共 50 題，均為四選一之單選題。每題 2 分，共 100 分。

1. 已知在座標平面上兩點 $A(-1, 5)$ 、 $B(2, 7)$ ，若點 $P(x, y)$ 滿足 $\overline{PA} = 3\overline{PB}$ ，則 P 點軌跡為何？
(A) 圓 (B) 橢圓 (C) 拋物線 (D) 雙曲線
2. 已知一長方體之所有邊長的總和為 80，又知一頂點到最遠之另一頂點的距離為 15，則此長方體之表面積為何？
(A) 175 (B) 200 (C) 225 (D) 250
3. 已知一三角形的三邊長分別為 11, 15, k ，且 k 為整數，試問滿足此三角形為鈍角三角形之 k 有幾個？
(A) 7 (B) 12 (C) 13 (D) 14
4. 設 $A(-2, 1)$ 、 $B(-2, 4)$ ，已知點 C 、 D 在直線 $y = x - 6$ 上，且線段 AC 與線段 BD 交於原點，試問線段 CD 的長度為何？
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 3 (D) $2 + \sqrt{2}$
5. 已知三角形的三邊長為 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{13}$ 、4，則這三角形的面積為何？
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
6. 在 18×18 的正方形圍棋盤（19 等距的水平線段與 19 條等距的鉛直線段交錯而成）上，用兩條水平線與兩條鉛直線所圍成的正方形中，令 a_1 代表邊長為 1 的小正方格的個數，令 a_2 代表邊長為 2 的正方格的個數， \dots ，依此類推。以下何者不正確？
(A) $a_1 = 324$ (B) $a_{17} = 4$ (C) a_9 是 a_{14} 的 4 倍 (D) $a_1 + a_2 + \dots + a_{18} = 18^3$
7. 正整數 x 介於 200 和 300 之間，已知 x 被 3 除餘 2，被 5 除餘 3，被 7 除餘 2，則 x 的各個位數的和為多少？
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10
8. 若實係數三次多項方程式 $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ 有一根為 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ，則 $b + c = ?$
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
9. 設 $a = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{101!}$ ，並令函數 $f(x) = a^x$ ，則對實數 x, y ，下列何者不正確？
(A) $f(x) > 0$ (B) $f(3) < f(\pi)$
(C) $f(x)f(y) = f(x+y)$ (D) $f(x) > f\left(\frac{1}{x}\right)$
10. 設 $f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = x^2$ ，則下列何者正確？
(A) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (B) $f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2}$ (C) $f(0) = 0$ (D) $f'(0) = 2$
11. 設 $\sqrt{14-4\sqrt{10}}$ 的整數部份為 a 且小數部份為 b ，則 $\frac{1}{a+b+5} - \frac{1}{b} = ?$
(A) 3 (B) -2 (C) -6 (D) 1

12. 設 $\log 2 = a$, $\log 3 = b$, 則 $\log_6 [\sqrt{5}(\sqrt{14-4\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}})] = ?$
- (A) $\frac{1-a+3b}{2a+b}$ (B) $\frac{1-a+3b}{2a+2b}$ (C) $\frac{1+3a+b}{2a+b}$ (D) $\frac{1+3a+b}{2a+2b}$
13. 設一平行四邊形 ABCD 的兩鄰邊長為 5 與 8, 夾角為 60° 。若兩對角線的夾角為 θ , 則 $\sin \theta = ?$
- (A) $\frac{20}{7\sqrt{43}}$ (B) $\frac{30}{7\sqrt{43}}$ (C) $\frac{40}{7\sqrt{43}}$ (D) $\frac{50}{7\sqrt{43}}$
14. 設 $x, y \in R$ 且 $3x+4y=5$, 則 x^2+2y^2 的最小值為何?
- (A) $\frac{5}{7}$ (B) $\frac{15}{17}$ (C) $\frac{25}{17}$ (D) $\frac{30}{17}$
15. 用 10 種顏色來塗正四面體的表面, 要求每面塗一色、各面異色且此四面體可翻轉, 則有多少種不同的塗法?
- (A) 1260 (B) 1680 (C) 420 (D) 210
16. 試求滿足 $C_0^n + \frac{1}{2}C_1^n + \frac{1}{4}C_2^n + \cdots + \frac{1}{2^n}C_n^n > 100$ 的最小自然數 n 為何?
- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
17. 某班某次段考的數學平均分數為 40 分、標準差 10 分, 且只有一人及格, 其分數為 90 分。若老師將每人成績乘以 1.5, 超過 100 分者以 100 分算, 那麼新的平均分數為 59 分, 試問班上有多少人?
- (A) 33 (B) 35 (C) 36 (D) 40
18. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 任意排列, 數字 1 排在 2, 3 前面的機率為何?
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$
19. 設 A, B 為獨立事件, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, 則 $P(A' \cup B') = ?$
- (A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{12}{15}$ (C) $\frac{13}{15}$ (D) $\frac{14}{15}$
20. 設甲、乙兩袋各有一紅球、一白球, 今從兩袋各取一球交換, 如此稱為操作一局, 則操作兩局後, 甲袋仍為一紅球、一白球的機率為何?
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$
21. 設平面 E 通過 $A(2, -1, 1)$, $B(-3, 1, 2)$, $C(1, 2, 1)$ 三點, 則下列何者為 E 的法向量?
- (A) $(3, 1, 13)$ (B) $(-3, -1, 12)$ (C) $(1, 1, 2)$ (D) $(2, 3, 5)$
22. 若 a, b, c 都是質數(不必都相異), 且滿足 $a+b+c+abc=99$, 則 $a+b+c = ?$
- (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23
23. 已知 b, c 均是小於 10 的正整數, 若二次方程式 $x^2 - bx + 3c = 0$ 的二根為 α 和 β , 且 $1 < \alpha < 2$, $5 < \beta < 6$, 則 $b+c = ?$
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11
24. 從 n 個連續正整數 $1, 2, 3, \dots, n$ 中, 刪去一個數後, 若剩下 $(n-1)$ 個數的總和為 2003, 試求這個刪去的數為何?
- (A) 7 (B) 13 (C) 19 (D) 23
25. 在 $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 99^2, 100^2$ 這 100 個數中, 十位數字為奇數的數共有多少個?
- (A) 16 (B) 20 (C) 25 (D) 32

26. 已知二次函數 $f(x) = a(x+1)^2 + b$ 滿足 $f(-4) > 0$, $f(-5) < 0$, 則下列三個數: $f(0)$ 、 $f(2)$ 、 b 由小而大的次序為何?

- (A) $f(2) < f(0) < b$ (B) $f(0) < f(2) < b$ (C) $f(2) < b < f(0)$ (D) $f(0) < b < f(2)$

27. 已知 x, y 均為正整數, 若 $29x + 145y$ 為完全立方數, 則 $x + y$ 的最小值為何?

- (A) 121 (B) 169 (C) 173 (D) 174

28. 有 100 元, 200 元, 500 元的鈔票 (每種至少一張) 共 24 張, 合計 10000 元, 則其中 200 元鈔票有多少張?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9

29. 有五位小朋友甲、乙、丙、丁、戊, 他們的體重分別為 a 、 b 、 c 、 d 、 e 公斤, 若 $a + b < c + d$, $b + c < d + e$, $c + d < e + a$, $d + e < a + b$, 則這五位小朋友中體重最重是哪位?

- (A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁

30. 設 a 、 b 為正整數, 已知 $a - b = 120$, 且 a 、 b 的最小公倍數是其最大公因數的 105 倍, 則 $a = ?$

- (A) 205 (B) 215 (C) 225 (D) 235

31. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAC$ 與 $\angle ACB$ 的角平分線交於 I 點, 若 $\angle AIC = 126^\circ$, 則 $\angle CAB = ?$

- (A) 31° (B) 29° (C) 27° (D) 36°

32. 求 $\left(1 + \frac{1}{1 \times 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \times 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \times 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{93 \times 95}\right) \left(1 + \frac{1}{94 \times 96}\right) = ?$

- (A) $\frac{95}{48}$ (B) $\frac{96}{47}$ (C) $\frac{98}{49}$ (D) $\frac{99}{50}$

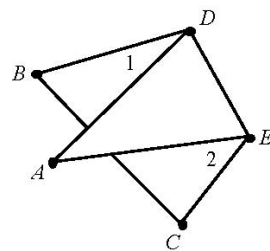
33. 已知 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數, 若 $f(x) = x - [x]$, 則 $f\left(\frac{1}{93}\right) + f\left(\frac{2}{93}\right) + f\left(\frac{3}{93}\right) + \cdots + f\left(\frac{930}{93}\right) = ?$

- (A) 450 (B) 455 (C) 460 (D) 465

34. 如右圖所示, 將紙片 $\triangle ABC$ 沿著 \overline{DE} 折疊壓平。已知 $\angle 1 = 23^\circ$, $\angle 2 = 33^\circ$,

則 $\angle A = ?$

- (A) 23° (B) 28° (C) 31° (D) 34°



35. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = ?$

- (A) 0 (B) 1 (C) e (D) 不存在

36. 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = ?$

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 不存在

37. 試求曲線 $y = x^2$ 和 $y = 2x + 3$ 所圍成的封閉區域之面積為何?

- (A) $\frac{31}{3}$ (B) $\frac{21}{2}$ (C) $\frac{32}{3}$ (D) $\frac{65}{6}$

38. 下列何者為 $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ 的一個局部極小值?

- (A) $-2e^{-1}$ (B) $2e$ (C) 0 (D) $\sqrt{2} \ln 2$

39. 設 $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ，則 $\iint_Q e^{-x^2-y^2} dx dy = ?$
- (A) $\pi(1-e^{-a^2})$ (B) π (C) πe^{-a^2} (D) $1-e^{-a^2}$
40. 將由 $y = x$ 與 $y = x^2$ 所圍成的有限區域繞 x 軸旋轉 360° 得一立體，則此立體的體積為何？
- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{15}$ (C) $\frac{2\pi}{15}$ (D) $\frac{\pi}{5}$
41. 設函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -1$ 處有極大值 7，在 $x = 3$ 處有極小值，則 a 、 b 、 c 的值下列何者正確？
- (A) $a = 3$ (B) $a = 1$ (C) $b = -9$ (D) $c = -2$
42. 設 $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^9$ ，則 $f'(1) + f''(1) - (f'(1))^2 = ?$
- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
43. 試求 $\int_{-2}^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = ?$
- (A) $\frac{3}{8}\pi$ (B) 6π (C) 8π (D) 10π
44. 設 A 為 n 階方陣， A^T 代表 A 的轉置矩陣， $\det(A)$ 代表 A 的行列式(determinant)，以下敘述何者不正確？
- (A) $\det(A) = \det(A^T)$ (B) 若 $\det(A) = 0$ ，則 A 沒有反矩陣
(C) $\det(A^{101}) = (\det(A))^{101}$ (D) 若 $\det(A) \neq 0$ ，則 A 未必有反矩陣
45. 設 $V = C([0, 1])$ 為定義在 $[0, 1]$ 上的連續實函數所成的向量空間。對於 $f, g \in V$ ，定義 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ，且 $f(t) = t$ ， $g(t) = e^t$ ，則下列何者正確？
- (A) $\|g\| = \frac{e^2-1}{2}$ (B) $\|f\| = \frac{1}{3}$ (C) $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2}(e-1)$ (D) $\langle f, g \rangle = 1$
46. 設 $V = \mathbb{C}^2$ 且 $\langle (x, y), (z, w) \rangle = x\bar{z} + y\bar{w}$ 。若 T 為 V 上的線性變換且 $T(z, w) = (2z + iw, (1-i)z)$ 。令 T^* 表示 the adjoint of T ，則 $T^*(3-i, 1+2i) = ?$
- (A) $(4-i, 2-4i)$ (B) $(4+i, 2+4i)$ (C) $(5-i, 1-3i)$ (D) $(5+i, -1-3i)$
47. 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，且 I 為三階單位矩陣，則下列何者不正確？
- (A) $A^{100} = A$ (B) $A^{2012} = A$ (C) $A^{999} = I$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ 不存在
48. 設 $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ， $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ， $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ，則 $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = ?$
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
49. 設集合 $A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ 為正整數且 } a+b+c=12\}$ ，且 A 中每一序對被抽中的機率均等。今從 A 中隨機抽取一序對 (a, b, c) ，發生 $a < b < c$ 的機率為何？
- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{6}{55}$ (C) $\frac{7}{55}$ (D) $\frac{8}{55}$
50. 2 的 100000 次方除以 77 所得的餘數為何？
- (A) 17 (B) 23 (C) 36 (D) 42