臺北市立松山家商101學年度第1次教師甄選初試

數學科 試題卷

一、填充題：(每題 7 分，共 63 分)

1. 如右圖所示，令第 i 行第 k 個數字爲 $f(i, k)$，此圖中之規則爲 $f(i, 1) = 2i - 1 = f(i, i)$，且 $f(i,k) = f(i-1,k-1) + f(i-1,k)$，其中 $2 \le k \le i-1$。則 $f(i,3)$ 之值爲______。

    1
   3　3
  5　6　5
 7　11　11　7
9　18　22　18　9
……………………………………

2. 設 $f(x) = \dfrac{1+x}{1-3x}$。令 $f_1(x) = f(f(x))$，且 $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$，$n \ge 2$ 且 $n \in N$，則 $f_{2012}(2012)$ 之值爲______。

3. 若 z 爲複數，$\arg(z^2-8) = \dfrac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+8) = \dfrac{\pi}{3}$，則 z 之值爲______。

4. 在袋中有紅球、白球各 100 個，每次從中取出一個球， 若爲紅球即得 1 分，白球不計分，滿足下列任一條件即停止：(1)得分達 5 分，(2)取出球數達 10 個。試問取球過程會出現幾種不同的方法？______。

5. 設 x, y 均大於 0，則聯立方程組 $\begin{cases} \dfrac{4x+3y-6}{4x+3y} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \\ \dfrac{4x+3y+6}{4x+3y} = \dfrac{4}{\sqrt{y}} \end{cases}$ 之解(x, y)爲______。

6. 已知$n \in N$，且 n 爲 6 的倍數，則$C_0^n + C_3^n + C_6^n + \cdots + C_n^n$之值爲______。

7. 已知空間中兩點 $A(7, 6, 3)$、$B(5, -1, 2)$，直線 L：$\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-3}{-2}$，且 P 爲 L 上之點。若$\overline{PA} + \overline{PB}$有最小值時，$P$ 點之坐標爲______。

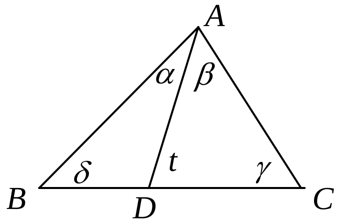
8. 令ΔABC 的外心爲 O，垂心爲 H。若ΔABC 的外接圓半徑爲 3，$\angle A = 60°$，$\angle B = 45°$，則$\overline{OH}^2$ 之值爲______。

9. 不等式$\log_{14}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}) > \log_{64} x$之解集合爲______。

二、計算與證明題：(共 37 分)

1. 設$a > b > 0$，則橢圓$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$之內接三角形面積最大值爲何？(5 分)試證之。(8 分)

2. 如右圖△ABC 中，D 爲$\overline{BC}$上任一點，$\angle BAD = \alpha$，$\angle CAD = \beta$，$\angle ACD = \gamma$，$\angle ABD = \delta$，$\angle ADC = t$，試證：
$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\sin\gamma + \sin\beta\cdot\sin\sigma$。(12 分)



3. 已知$a_0 = 1$，且$a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}^{\ 2}}$，其中 n 爲任意正整數。試證：$a_n \le \dfrac{3}{4\sqrt{n}}$，$n \in N$。(12 分)