高雄 101 聯招

1. 已知點 $A(5,5,2)$ 在直線 $L:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ 上，又平面 $E:2x+y+3z=7$，且 B 為 L 與 E 的交點。在平面 E 上另取一點 C，使 $\overline{AC}=\overline{AB}$，且 ΔABC 面積為最大，求 C 點的座標為？
2. 大雄到遊樂場玩擲硬幣計分遊戲，遊戲時要一次擲出五個均勻硬幣。如果出現正面的個數少於出現反面的個數，就必須重擲，直到擲出正面的個數多於返面的個數為止。此時如果出現三個正面得 6 分，出現四個正面得 9 分，出現五個正面得 15 分。求大雄玩此遊戲得分的數學期望值？
3. 已知當 $0\le x\le 1$ 時，$f(x)=x^2-2kx+3k^2$ 有最小值 5，則 k ？
4. n 個箱子，分別編號 1、2、3、……、n。若 1 號箱內有 1 個紅球，n-1 個白球；2 號箱內有 2 個紅球，n-2 個白球；3 號箱內有 3 個紅球，n-3 個白球；餘類推……。今先任選一箱再取球 r 次，每次取一球，取後均放回；設 r 次都取到紅球的機率為 p_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$
5. ΔABC 中，$\angle B=90^\circ$，$\overline{AB}=1$，點 D、E 在 $\overline{BC}$ 上滿足 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=1$，設 $\angle DAE=\alpha$，$\angle CAE=\beta$，求 $\sin(\alpha-\beta)=$
6. 已知 z 為複數，$Arg(z)=\dfrac{2\pi}{3}$，且 $4\left|z-\sqrt{3}i+1\right|=3\left|z+3\sqrt{3}i-3\right|$，求 z
7. $n\in\mathbb{N}$，平面 $E_n:\dfrac{n}{2}x+\dfrac{(n+1)}{3}y+\dfrac{(n+2)}{2}z=1$，和 x 軸、y 軸、z 軸正向分別交於 A_n、B_n、C_n，O 表原點，令 V_n 表四面體 $O-A_n-B_n-C_n$ 之體積，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$
8. 若 $\begin{cases}2a_1x+3b_1y+c_1z=4d_1\\2a_2x+3b_2y+c_2z=4d_2\\2a_3x+3b_3y+c_3z=4d_3\end{cases}$ 之解為 $(2,1,3)$，求 $\begin{cases}\dfrac{3a_1}{x-2}+\dfrac{b_1}{y-1}+\dfrac{3c_1}{z+3}=d_1\\\dfrac{3a_2}{x-2}+\dfrac{b_2}{y-1}+\dfrac{3c_2}{z+3}=d_2\\\dfrac{3a_3}{x-2}+\dfrac{b_3}{y-1}+\dfrac{3c_3}{z+3}=d_3\end{cases}$ 之解
9. 設一拋物線的對稱軸與直線 $x=y$ 平行，焦點在 $F(2,6)$，且焦點到準線的距離是 $8\sqrt{2}$，試求此拋物線的方程式
10. ΔABC 中，a,b,c 分別表示 $\angle A,\angle B,\angle C$ 對邊長，若 $a\cos A=b\cos B-c\cos C$ 且 $a+b+c=12$，試求 ΔABC 的最大面積為？

計算證明題

11. 某次月考數學成績，甲班有n_1人，平均為μ_1分，標準差為σ_1分，乙班有n_2人，平均為μ_2分，標準差為σ_2分，若$\mu=\dfrac{n_1\mu_1+n_2\mu_2}{n_1+n_2}$，則甲、乙兩班合成一班之後，數學成績的標準差為(1) $\dfrac{n_1\sigma_1+n_2\sigma_2}{n_1+n_2}$ (2) $\sqrt{\dfrac{n_1{\sigma_2}^2+n_2{\sigma_1}^2+n_1({\mu_1}^2-\mu^2)+n_2({\mu_2}^2-\mu^2)}{n_1+n_2}}$

(3) $\sqrt{\dfrac{n_1{\sigma_1}^2+n_2{\sigma_2}^2+n_1(\mu_1-\mu)^2+n_2(\mu_2-\mu)^2}{n_1+n_2}}$ (4)以上皆非

請寫出正確選項並證明此結果。(標準差公式=$\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}{n}}$)

12. 試證在$\mathbb{R}^3$中，由$\overrightarrow{u}=(a_1,b_1,c_1)$、$\overrightarrow{v}=(a_2,b_2,c_2)$、$\overrightarrow{w}=(a_3,b_3,c_3)$三向量所張拓的平行六面體的體積為$\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

13. 設$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbb{R})$，試證：$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$三數之中至少有一數不小於$\dfrac{1}{2}$

14. 設$\theta=\dfrac{2\pi}{49}$，求$1+2\cos\theta+3\cos2\theta+...+49\cos48\theta$

15. 設$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，且$X$、$Y$均為二階方陣，滿足$X+Y=I$，$XY=O_2$，若$aX+bY=A$，其中$a>b$，且$a,b$為定數，試求(1)數對$(a,b)$ (2) X^{10}

16. 試求$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2k-1}{2}})$