

一、填充題(每題 7 分，8 題共 56 分)

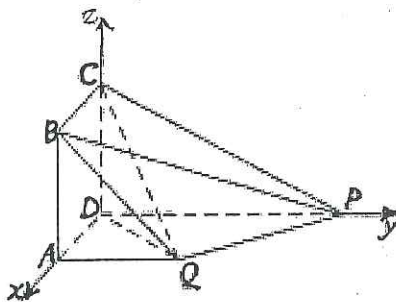
※請將答案填入答案欄中，否則不予計分

1. 已知拋物線方程式 $y^2 = 4x$ ，在其內作半徑為 4 的圓 C_1 內切於拋物線，作圓 C_2 與 C_1 外切且內切於拋物線，作圓 C_3 與 C_2 外切且內切於拋物線，如此繼續下去，得一序列圓 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ ，則前 n 個圓的面積和為_____。

2. 設 $x > y > 1$ ，而 $z > 0$ 且 $z \neq 1$ ，若 $3(\log_x z + \log_y z) = 16 \log_{xy} z$ ，則 $\log_x y =$ _____。

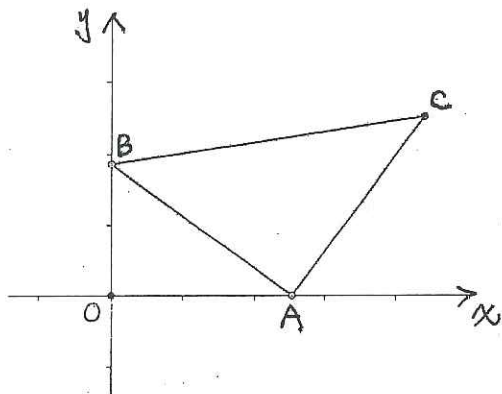
3. 設隨機變數 X 為二項分布 $B(n, p)$ ，令隨機變數 Y 的定義如下： $Y = \begin{cases} 4 & \text{若 } X \text{ 為偶數} \\ 2 & \text{若 } X \text{ 為奇數} \end{cases}$ ，求 Y 的期望值為_____。

4. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{PD} \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\overline{PD} \parallel \overline{QA}$ ， $\overline{QA} = \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{PD}$ ，求 $\triangle QPB$ 與 $\triangle CPB$ 所夾二面角的餘弦值為_____。



5. 設 $a > b > 0$ ，求 $a^3 + \frac{6}{b(a-b)}$ 的最小值為_____。

6. 如圖， x 軸、 y 軸正向上分別有動點 A 、 B 在滑動，其中 \overline{AB} 的長度等於 2，現在以 A 為直角頂點作等腰三角形 $\triangle ABC$ ，當 \overline{OC} 最大時， $\triangle OAB$ 的面積為_____。



7. 已知方程式 $x^3 - x^2 - kx + \frac{3}{2}k = 0$ 有 3 個相異的實數解，試求 k 的範圍為_____。

8. 曲線 Γ 為 $f(x) = \ln x$ 的圖形，過原點 O 與 Γ 相切之切線為 L ， Γ 與切線 L 及 x 軸所圍成之區域為 R ，試問 R 繞 x 軸旋轉，所得的旋轉體體積為_____。

答案欄：

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.

二、計算證明題(3題 共44分)

1. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{bmatrix}$ 代表平面上的線性變換， L_n 為通過原點的直線，

(1) 線性變換 A 將 L_n 變換到 L_n ，試求滿足這樣條件的 L_n 之方程式。(7分)

(2) 設 $y=x^2$ 與(1)中滿足條件的直線 L_n 所圍成的區域面積為 S_n ，試求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}}$ 的值。(7分)

【答案】

2. 設 n 為大於 1 的正整數，數列 $\langle a_j \rangle$ 滿足 $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j=1, 2, \dots, n$)，試證明：

對於任何大於 1 的正整數 n ， $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1 - (a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^{n-1}})$

(15 分)

【答案】

3. 空間中相異三平面 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, 令 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$, 已知此三平面兩兩交於一線, 但三線不共點。

試證: (1) $\Delta = 0$, (6分)

(2) Δ_x, Δ_y 與 Δ_z 至少有一不為 0. (9分)

【答案】