2012 TCFSH Anniversary Mathematics Competition

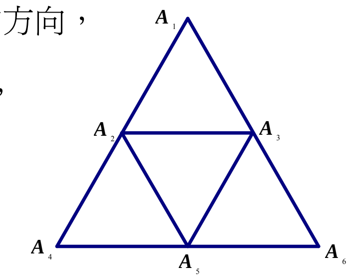
A-1 已知滿足不等式$|kx-x^2-8|+|x-3|\le 5$的 x 的最大值為 3，則 x 的最小值________。

A-2 求$\sum_{n=1}^{9999}\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1})}$的值。

A-3 求方程式$y^3-x^3=91$的整數解。

A-4 計算$\sqrt{111111+4444444444-66666}=$__________。

A-5 一隻烏龜延著下圖的線段爬行（每線段都等長），設烏龜在每線段中不改變爬行的方向，而在每個交點處選擇任一方向的機率相等，如：在A_1選擇A_2、A_3的機率各為$\frac{1}{2}$，在A_2選擇A_1、A_3、A_4、A_5的機率各為$\frac{1}{4}$，設烏龜爬行每一線段所需要的時間都是一分鐘，則烏龜從A_1爬到A_6所需時間的期望值為多少？



A-6 $P=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{2003\times 2004}$，

$Q=\frac{1}{1003\times 2004}+\frac{1}{1004\times 2003}+\frac{1}{1005\times 2002}+\cdots+\frac{1}{2004\times 1003}$，則$\frac{Q}{P}=$？

A-7 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$，$a>0$，則$\sum_{k=1}^{2009} f(\frac{k}{2010})=$？

A-8 已知自然數n滿足$133^5+110^5+84^5+27^5=n^5$，試求$n$之值。

A-9 三階方陣$A=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$A^{10}=\begin{bmatrix}1 & ka & pa^2+qb\\ 0 & 1 & ka\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，則$k+p+q=$____________.

A-10 空間中兩歪斜線$L_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}$，$L_2:\frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$，若正△$PQR$中，$P$在$L_1$上，且$Q$，$R$都在$L_2$上，求△$PQR$的最小面積為__________.

A-11 x，y，$z\in Z$，$x+y+z=3$ 且 $x^3+y^3+z^3=3$，求$|x|+|y|+|z|=$______。

A-12 設a,b,c是方程式$4x^3+321x+2012=0$的三個根，求$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=$___________。

A-13 今天是星期二，再過2012^{2012}天後是星期幾？

A-14 已知 a、b、x 是實數，函數 $f(x)=x^2-2ax+1$ 與函數 $g(x)=2b(a-x)$的圖形不相交，若參數 a、b 所組成的點集合$(a，b)$為 A，則集合 A 所有的點所形成的圖形面積為___________。

A-15 空間中有一四面體 $ABCD$，若 $A(8,0,0)$、$B(0,-4,0)$、$C(-7,0,3)$、$D(7,1,-1)$，一平面 E 和此四面體的$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$四邊各交一點，且 A、B、C、D 四點到平面 E 等距，求平面 E 之方程式。

A-16 設 $a>0$，$b>0$ 且 $a+b=1$，求$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$之最小值。

A-17 設$a,b\in R$ 且 $a+b=1$，求$(a+2)^2+(b+2)^2$之最小值。

A-18 已知一集合$\{2^t+2^s\,|\,0\le s<t,s,t\in Z\}$，所有數由小而大形成一數列$\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}$；

例如：$a_1=3,a_2=5,a_3=6,\cdots$，問$a_{100}=$？

A-19 已知 x 的不等式$\frac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集合為A，若$3\in A$且$5\notin A$，求實數 a 的最大值？

A-20 設多項式$f(x)=x^{15}-2012x^{14}+2012x^{13}-2012x^{12}+2012x^{11}-\cdots+2012x^3-2012x^2+2012x$，則$f(2011)=$__________。

A-21 在 1 到 2013 之中，最多可選取多少個正整數，使得被選取的數之中，任意兩數的差均不為質數。

A-22 設$S=\{x\,|\,101\le x\le 2012,x\in N\}$，從 S 中<u>最多</u>能取出_______個這樣的數，使得其中任意兩個數的和不能被這兩個數的差整除。

A-23 對於任意實數 x，高斯值 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如 $[2.8]=2$，$[-2.8]=-3$。數列 $<x_n>$ 滿足 $x_1=\frac{1}{2}$，

$x_{k+1}=x_k^2+x_k$，試求高斯值 $\left[\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots\cdots\frac{1}{x_{2008}+1}\right]=$？

B-1 在數列 $\left[\frac{1^2}{2012}\right]$、$\left[\frac{2^2}{2012}\right]$、$\left[\frac{3^2}{2012}\right]$、…、$\left[\frac{2012^2}{2012}\right]$ 中，有多少個不同的數？（其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數）

B-2 在擲硬幣時，如果用 Z 表示正面朝上，用 F 表示反面朝上，那麼擲硬幣的序列就可以表示為由 Z 和 F 組成的序列，我們可以統計在這種序列中正面緊跟反面(FZ)的出現次數，正面緊跟著正面(ZZ)的出現次數，如此等等，例如，序列 ZZFFZZZZFZZFFFF 是擲 15 次硬幣的結果，其中有 5 個 ZZ，3 個 ZF，2 個 FZ 和 4 個 FF。問，在擲 15 次硬幣的序列中，恰有 2 個 ZZ , 3 個 ZF，4 個 FZ 和 5 個 FF 的序列共有__________個。

B-3 $\begin{cases} a+b=1 \\ \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{2008-c}=\frac{1}{2008} \end{cases}$，求 $\frac{a^{2009}}{c^{2008}}+\frac{b^{2009}}{(2008-c)^{2008}}=$？

B-4 設 $A=\{1，2，\ldots\ldots，n\}$，用 S_n 表示 A 的所有非空子集中每個元素之和，B_n 表示 A 的子集個數。

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2\cdot B_n}=$？

B-5 設 $a=2^n\cdot 3^m$，其中 n 與 m 皆表大於或等於 0 的整數。則滿足 a^6 不是 6^a 的因數之所有正整數 a 的總和是多少？

B-6 $p(x)=x^{2012}+a_{2011}x^{2011}+a_{2010}x^{2010}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 a_k 為 1 或 -1

今已知方程式 $p(x)=0$ 沒有實數解，則所有的 a_k 中最多能有幾個 -1？並寫出一個條件要求的 $p(x)$。

B-7 已知數列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，前 n 項部分和 S_n 滿足 $S_n\sqrt{S_{n-1}}-S_{n-1}\sqrt{S_n}=2\sqrt{S_nS_{n-1}}$，則 a_n？

B-8 某草原上有編號 1~12 個帳篷，已知

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 號內共有 12 人；

(2) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 號內共有 15 人；

(3) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12 號內共有 13 人；

(4) 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12 號內共有 14 人。

問 12 個帳篷中人數分配之可能情形至多有__________種。

B-9 $S_n=1\cdot3\cdot2^2+2\cdot4\cdot3^2+\cdots+n(n+2)(n+1)^2$，求 S_n。

B-10 求函數 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值。

C-1 若相異的正整數 a,b,c,d,e,f,g,h,n 滿足 $n=a\times b+c\times d=e\times f+g\times h$，則 n 的最小值為？

(說明理由並找出一組解)

C-2 12 個球隊比賽，每兩隊主、客場各比賽一次，勝者得 3 分，不分勝負者各得 1 分，敗者得 0 分，問第一名至第十二名各隊積分表上，積分相差的最大值是多少？

C-3 校慶有獎徵答要準備 10 份考卷，每[份考卷有 4 道題目，且任意兩份考卷之中至多只有一道題目相同。試求至少要準備多少道題目？

C-4 有 n 支球隊參加棒球比賽，每兩隊都要交手一次，勝的可得 2 分，平手可得 1 分，輸的 0 分。已知其中有一球隊的積分最高(其他隊的積分都比他低)，但這支球隊的勝場是 n 支球隊中最少的(其他隊的勝場都比他多)，試問 n 的最小值為何？

C-5 如果四位數 $abcd$ 的千位數 a、百位數 b、十位數 c、個位數 d，滿足 $a+b=c+d$，就稱為『好數』。

例如 2011 就是一個『好數』。求四位數 $abcd$ 有幾個好數？

C-6 設 $f(n)$ 是與 $\sqrt[4]{n}$ 最接近的整數，求 $\sum_{k=1}^{2012}\frac{1}{f(k)}$

参考答案：

A-1：2　A-2：9　A-3：$\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$，$\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$，$\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$，$\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$　A-4：66667　A-5：10

A-6：$\frac{2}{3007}$　A-7：$\frac{2009}{2}$　A-8：144　A-9：65　A-10：$\frac{49\sqrt{3}}{135}$　A-11：13　A-12：1509

A-13：星期四　A-14：π　A-15：E：$x-2y+3z-5=0$　A-16：$\frac{25}{2}$　A-17：$\frac{25}{2}$　A-18∶16640

A-19：25　A-20：2011　A-21：504(取 1,5,9,13,17,...,2013)　A-22：638　A-23：1

B-1：1510　B-2：560　B-3：$(\frac{1}{2008})^{2008}$　B-4：$\frac{1}{4}$　B-5：42

B-6：1006，$p(x)=x^{2012}-x^{2011}+x^{2010}-x^{2009}+\cdots-x+1$　B-7：$a_n=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 8(n-1) & n>1 \end{cases}$　B-8：86400

B-9：$\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$　B-10：$\sqrt{10}$

C-1：31，$31=1\times7+4\times6=2\times8+3\times5$　C-2：46　C-3：13　C-4：6　C-5：615　C-6：$402\frac{3}{7}$